線形代数授業の再設計案と Teams を活用した効率的実践

笠谷 昌弘*

A Redesign Plan of Linear Algebra Classes and Efficient Practice by Utilizing Teams

KASATANI Masahiro*

Triggered by online classes due to COVID-19, the National Institute of Technology, Toyama College has begun to use Microsoft Teams actively. In the linear algebra classes of the 2021 academic year, the author mathematically redesigned the contents of the textbook, mainly on the determinant. Firstly, the author defined the determinant by alternating multilinearity. Secondly, the author derived the explicit formula and geometric aspects of the determinant in terms of alternating multilinearity. By utilizing ICT such as Teams, the author also planned efficient classes. Through the practice of these methods, the author has given the students a good outlook on linear algebra, especially the determinant.

キーワード：授業設計，線型代数学，行列式の多重線形性と交代性，行列式の図形的意味

1．はじめに

COVID-19（新型コロナウィルス）感染拡大によるオンライン授業を契機として，富山高等専門学校においては Microsoft Teams を積極的に活用することとなった。一方で，コロナ禍前から，同校本郷キャンパスの線形代数授業では，授業時間数の制約の中でどうやってカリキュラムを円滑に進行するかという課題も抱えていた。著者は，2021 年度の線形代数授業において，主に行列式分野について教科書の内容を数学的に再設計した。同時に，Teams 等の ICT を活用することによる効率的な授業を計画した。これらの手法によって，工学系の学生にとって将来必要なことが明確である，見通しのよい授業を実施することができたので，以下にその計画と実践を報告する。

* 一般教養科　数学
e-mail: mkasatani@nc-toyama.ac.jp

2．カリキュラム

富山高等専門学校（以下，本校）の本郷キャンパスには，機械システム工学科，電気制御システム工学科，物質化学工学科の 3 学科があり，3 学科とも 2 年次に週 1 コマ 90 分の線形代数Ⅰ（前期）と線形代数Ⅱ（後期）が開講されている。中間試験および期末試験をそれぞれ 1 週と数えると，前後期とも 16 週である。線形代数Ⅰでは平面ベクトルの定義から空間ベクトルの線形独立までを扱う。線形代数Ⅱでは行列の定義から行列式の応用まで（のうち到達できる範囲）となっている。使用する教科書類は，2021 年度までは大日本図書の『新線形代数』[1]および同問題集，2022 年度からは同社の『新線形代数　改訂版』[2]および同問題集である。同教科書[1][2]に沿うと，線形代数Ⅰ（前期）は第 1 章，線形代数Ⅱ（後期）は第 2 章～第 3 章となる。

週1コマだけでベクトルの基礎から行列式まで教える必要があるので，同じ 2 年次に週 2 コマで開講される微分積分学と比べると，時間的な制約が厳しい。具体的には，例年では通常通りに教科書に沿って問題

演習を交えた授業を行うと，余因子展開や余因子行列による逆行列公式まで（第 3 章§2.2 まで）は終えられるが，連立 1 次方程式と行列式（同§2.3）および行列式の図形的意味（同§2.4）については十分に消化できず，一部の内容を上の学年に回すことがほとんどであった。なお，3 年次の解析学の後半では，重積分の変数変換においてヤコビアンが登場するため，行列式の図形的意味が必要になる。

その一方で，2021 年度より本校では新カリキュラムが適用されており，線形代数分野については，3 年次までに高専機構の定めるモデルコアカリキュラムに指定された単元である線形変換（合成・逆・回転変換を含む）までを一通り終えることとなった。

このように，線形代数分野の授業設計について何らかの改善が必要な状況であった。

なお，2020 年度入学生より，学生は BYOD（Bring Your Own Devices）端末，つまり個人のノートパソコンを全員所有しており，Teams 会議の接続に習熟していることを付記する。

３．授業計画

2021 年度は，翌 2022 年度に新カリキュラムが 2 年次に適用されることを踏まえ，その準備として，著者が線形代数を担当し，改善を試みることになった。以下，前期～夏休みの下準備，行列分野における効率化，行列式分野での本格的再設計，の 3 つに分けて授業計画の概要を説明する。

３．１　準備と伏線（前期～夏休み）

そもそもの前提として，学生には週1コマしかない線形代数分野についても意識を高め，興味を持ってもらうことが重要である。

そのため，前期のうちから，授業ノートを PDF ファイルにしたもの（以下，PDF ノートという）をおよそ授業の 1 週前に順次 Teams で配布し，予習・復習を積極的に行うよう常に促した。PDF ノートでは，成分表示されたベクトルの内積公式について教科書と異なる簡便な別証明を紹介したり，平面・空間ベクトルの線形独立性の定義には複数のやり方があることを紹介したり，などの工夫によって，興味や理解を深めさせると同時に，後期に PDF ノートを用いて授業の再設計が本格化することへの伏線も張った。授業中は，プロジェクタおよび Teams オンライン会議にて前述の PDF ノートの画面を提示かつ録画しながら，板書を用いた通常通りのスタイルの授業を行った。

夏休みには，例年であれば問題集を用いて前期範囲すべての総復習をさせるのが定例であった。2021 年度は，定期試験対策の課題として一度は一通り問題を解かせていることもあったため，復習については要点を押さえた範囲に絞り，代わりに，後期の内容の予習を課題に追加した。より具体的には，復習範囲としては，ベクトルの成分による和やスカラー倍の計算（行列の演算につながる）や，成分による内積の計算（行列の積につながる），連立一次方程式についての問題（行基本変形による解法につながる）等のみを課題とした。予習範囲としては，教科書[1]第 3 章（行列分野，後期中間試験までの範囲）を一通り読み，本文中の問で解けるものはすべて解いておく，という課題とした。

３．２　行列分野（後期中間まで）

後期は行列分野に入る。教科書[1]では第 2 章である。この分野は，計算の手順としては（同時期に習う積分法と比べると）比較的単純なものが多いが，書く量が多いという特徴がある。特に行列に関する諸公式の証明は，行列の成分が大量に現れるため，教員が板書するのも，学生がそのノートをとるのも時間を要する。

この点を効率化するため，行列演算の習熟のために学生自身が手を動かすことが必要な部分については従来通りの板書を用いた授業としつつ，公式の証明など従来ならば大量の板書を必要とする場面においては，板書を減らし，事前に Teams で配布してある PDF ノートをプロジェクタおよび Teams オンライン会議にて画面提示かつ録画した。提示の際は，下線や矢印，簡単な文字などの補足を書き入れながら，計算の流れや考え方の説明と理解に重点を置いた授業を展開した。つまり，板書の時間を少しずつ節約したわけである。

３．３　行列式分野（後期中間後）

後期中間試験後は行列式分野を扱う。教科書[1]で

は第3章である。行列式について，教科書[1]では典型的な明示公式による定義を用いている。すなわち，自然数1, 2, …, nの順列について偶順列と奇順列を定義し，行列の各行から順列によって決まる成分を1つずつ選んで積をとった項にプラス（偶順列の場合）またはマイナス（奇順列の場合）の符号をつけて，すべての順列についての項の和をとるものである。しかし，この定義の立場に立つと，行基本変形の各性質を導くためにたびたび順列の性質に立ち戻った証明を要し，工学系の線形代数初学者，年齢としては高校2年生相当の学生にとっては，いささか取っつきにくい部分であった[3]。なお，これがもし数学系の大学生を対象とした数学教育であれば，1, 2, …, nの順列の全体はn次対称群と同一視でき，代数学における群の重要な例であるから，行列式を定義する流儀として明示公式が重要であることは言うまでもないであろう。

2021年度の本計画においては，2次および3次の行列式についてサラスの公式を紹介したあと，一般の行列式の定義には3種類あることをまず簡単に紹介した。すなわち，教科書の定義（明示公式），多重線形・交代性による定義，図形的意味（符号付き面積・体積）による定義，である。授業では，まず多重線形・交代性による定義を最初に導入し，行基本変形に慣れるための演習を簡単に行う。次に，多重線形・交代性を用いることで行列式の明示公式を導く。そして，行基本変形は平行四辺形や平行六面体への図形的操作と解釈することができ，行列式に図形的意味があることも導く。これらの導出では板書を省き，PDFノートの画面提示・録画と配布した印刷物により，計算の流れと考え方を中心に説明し理解させることを重視した。なお次の節で，PDFノートの一部を掲載する。

これによって，通常であれば3コマ分を要する授業を，2コマ分の授業に圧縮した。また単なる時間圧縮だけでなく，行基本変形や図形的意味など，工学系の学生が知っておくべき性質を最初に提示し，この分野で得られる事実をはじめに印象付けたため，授業の見通しをよくすることができた。

なおその後の，余因子展開，余因子行列，クラメルの公式などについては，PDFノートおよびTeamsを引き続き活用して効率化を図りつつも，流れとしては教科書[1]に沿って，通常通り板書による授業を行った。

4. 授業資料

この節では，実際の授業実践にも用いたPDFノートを一部紹介する。

4．1 行列式の3種類の定義の概要

教科書[1] 3章§1.1にあたるPDFノートは計2ページである。前半1ページは教科書にあるサラスの公式の紹介であるので，紙面の都合により省略する。行列式の3種類の定義の概要を紹介している2ページ目を図1に示す。3年次の解析学で行列式の図形的意味が必要になることもここで一言触れている。

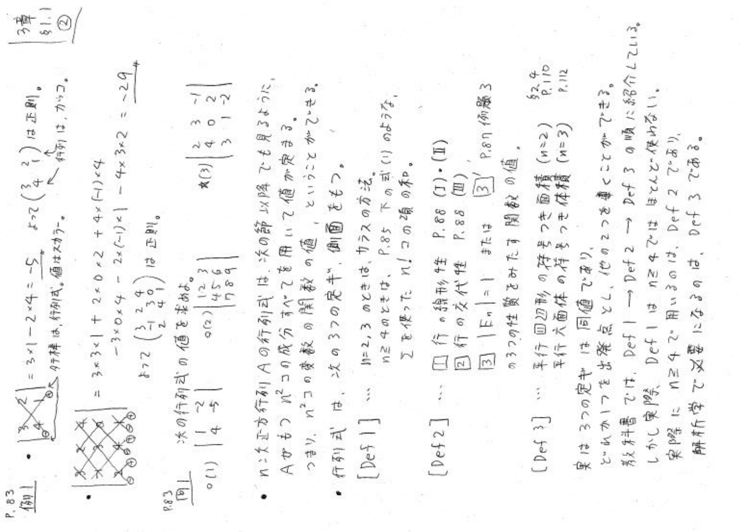

図1 行列式の3種類の定義の概要

４．２　多重線形・交代性による定義，多重線形・交代性から明示公式を導く

教科書[1] 3 章§1.2 を再設計した PDF ノートは計 6 ページあり，1 コマの授業で行う。紙面の都合により，1 ページ目（多重線形・交代性による行列式の定義）のみを図 2 に，5・6 ページ目（多重線形・交代性から明示公式を導く）のみを図 3 に示す。

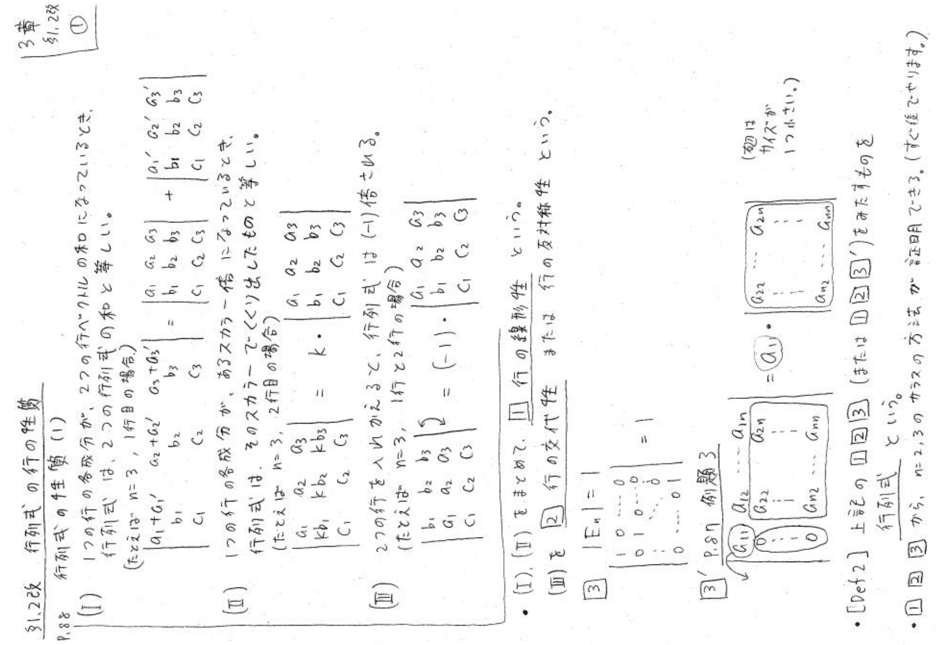

図 2　多重線形・交代性による行列式の定義

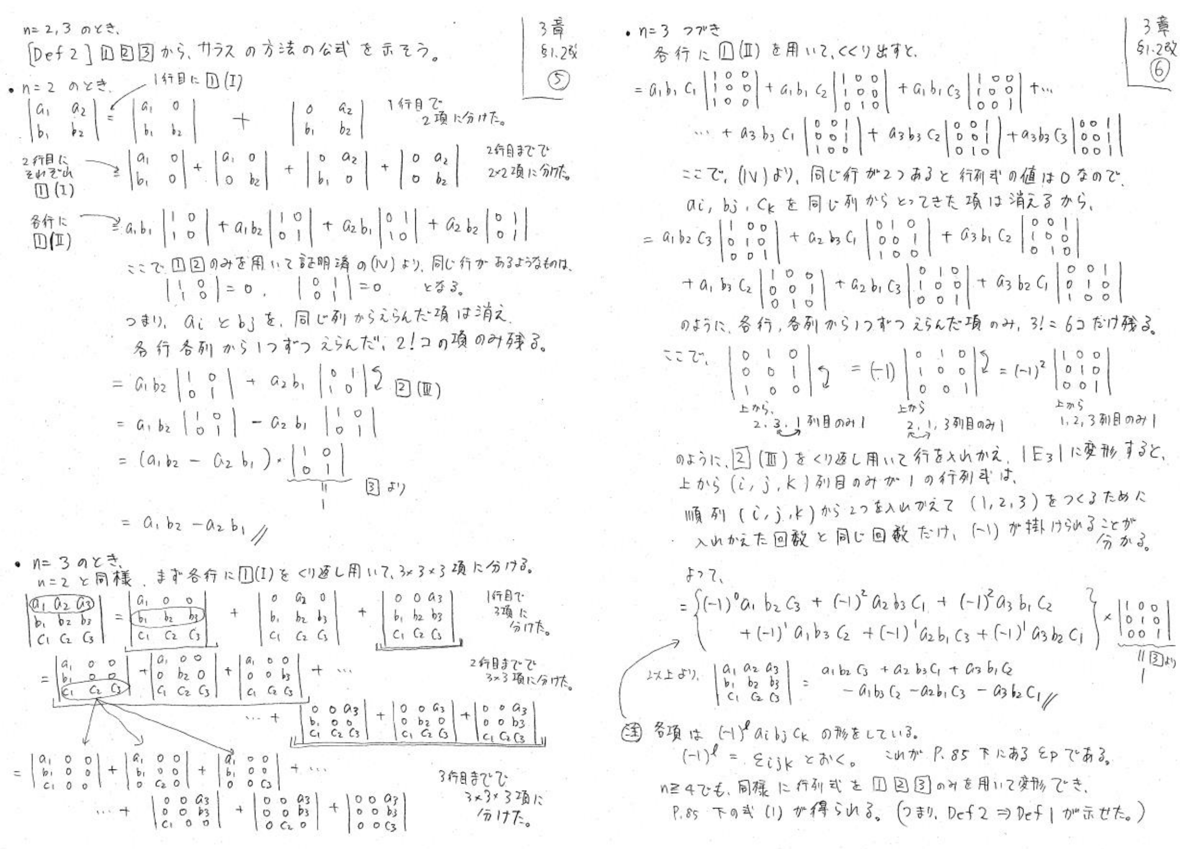

図 3　多重線形・交代性から行列式の明示公式を導く

４．３　多重線形・交代性から行列式の図形的意味を導く

教科書[1] 3 章§1.3（転置行列の行列式および列基本変形）を再設計した 3 ページと, 3 章 2.4（行列式の図形的意味）を再設計した 3 ページ（つまり計 6 ページ分）を 1 コマの授業で行う。紙面の都合により, 後半 3 ページのうち 2 ページのみを図 4 に示す。

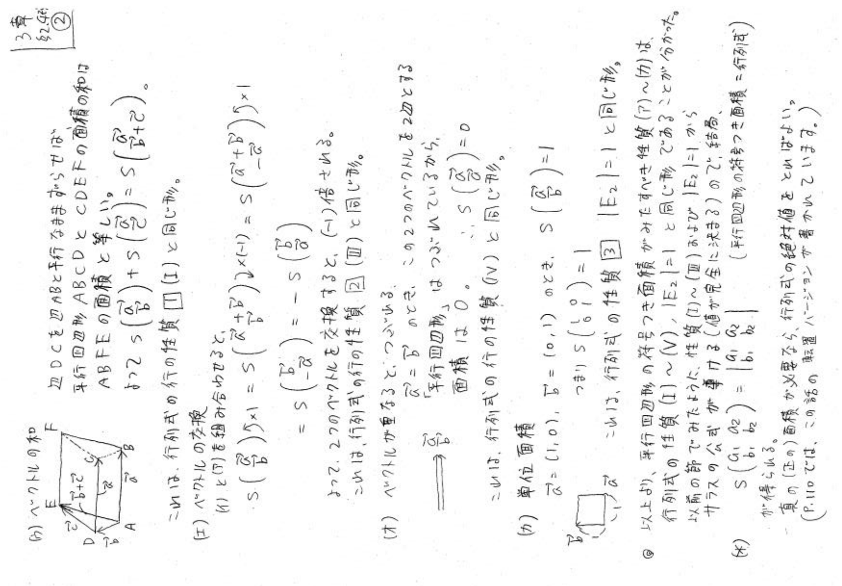

図 4　多重線形・交代性から行列式の図形的意味（平行四辺形の面積）を導く

５. 実践結果

この節では, 2021 年度の本計画の実践について, アンケート結果と成績の概要を述べる。

５．１　行列式教材のアンケート

行列式に関する独自教材を用いた授業について, 後期末試験直前の授業にて Microsoft Forms による無記名アンケートを実施した。全 3 学科で計 108 件（学科ア：n=35, 学科イ：n=35, 学科ウ：n=38）の回答が得られた。結果を表 1・表 2・表 3 に示す。

表 1　行列式教材のアンケート（5 段階評価部分）

設問（回答は 1～5 の 5 段階）	平均値
まず、§1.2 改（線形性・交代性など各種性質による行列式の定義、性質からサラス公式等の導出）について聞かせてください。§1.2 改の教材と授業はどのくらい分かりやすかったですか？	4.34
§1.2 改の内容はどのくらい身につきましたか？	3.81
次に、§1.3 改（各種性質から転置と列の性質を導く）について聞かせてください。§1.3 改の教材と授業はどのくらい分かりやすかったですか？	4.31
§1.3 改の内容はどのくらい身につきましたか？	3.76
次に、§2.4 改（符号付き面積や体積が、行列式の各種性質を満たす）について聞かせてください。§2.4 改の教材と授業はどのくらい分かりやすかったですか？	4.22
§2.4 改の内容はどのくらい身につきましたか？	3.65

表 2　行列式教材のアンケート（自由記述 1 部分）

設問「進め方として，例題の計算などは板書で説明し，込み入った証明などは画面提示のみとしました。このスタイルについて、感想や要望があれば教えてください。特にない場合は空欄でお願いします。」
とても分かりやすかったです
予習で教科書を自分で読んでもわからなかった箇所が丁寧にわかりやすく書かれていたので理解しやすかった。
効率的かつわかりやすかったです。 後々見直して振り返ることも出来るので勉強もしやすいです。
わかりやすくて嬉しいです😊
授業がスムーズだったが、ノートを取るのが面倒になってノートでの振り返りがしづらくなった。
先生の説明に集中できて良かったです
分かりやすかったです。
わかりやすく授業の進み方もスムーズであったが，ノートに板書を取らなかったためあまり記憶には定着しなかったため追加で問題を解きたいと思った。
わかりやすくてとても良かったです。
わかりやすかったです。
分かりやすかった。
教科書の説明よりも、丁寧なスライドやプリントだったので分かりやすかったです。
公式の証明を重要に思っている自分にとっては合わない授業スタイルでした。逆に、例題の計算など簡単なことは画面提示にして、証明などは流さずしっかりとして欲しいです。

表 3　行列式教材のアンケート（自由記述 2 部分）

設問「そのほか、§1.2 改・§1.3 改・§2.4 改について、感想、要望、気づいた点、改善点、など何でもよいので何かコメントください。(私からの返答が欲しい場合のみ、ここに名前も書いてください。)」
いつもありがとうございます。
良いと思います
オリジナルのプリントがわかりやすかったです
授業には関係ありませんが授業プリントを無くしてしまう性格なのでノートの写真を撮って提出することも可能にして欲しいです。
大変申し訳ございませんが、もう少し証明の過程を細く書いてほしいです。具体的には〇〇は･の定理よりこうなるとかです。
転置の説明がわかり辛かったです。（学生の名前）
よかった
教科書よりやりやすかったです
問題を何度も解いて身につけたいです。
例題説明してから問に行くのが凄いわかりやすいです。
丁寧でわかりやすかったです
教科書通りに進まないと言われた時、ついていけるか心配でしたが、授業ノートが分かりやすかったので授業内でしっかり理解出来ました。テストまでに忘れないうちにもう一度授業ノートを確認しておきたいです。
§2.4 改の内容をもう少し濃くしてほしい

説明が分かりやすかったです
読みやすかったしノートを書く手間もないので取り組みやすかったです!
資料を Teams に載せてあるのが楽でよかった
もう少し板書を整理する時間や問いを解く時間が欲しいです
解説自体は分かりやすかったが、進み方が教科書と違い、出来れば教科書と同じにしてほしかった
行列が意外なところで使われているのを知って驚いた
わかりやすかったです。
教科書を読んでもあまり理解できなかったが、今回のような解説の仕方で理解出来ました。
配布された教材がわかりやすかった
難しい事なのかもしれませんが、出来れば、学科別や社会でどこで応用されているのかを簡単に教えて貰うと目標ができ、モチベーションに繋がると思いました。
プリントがあり、ノートを取らなくてもよかったので話を聞くことに集中できた。しかし、書くという作業がなくなった分定着しにくかった
逆行列や連立一次方程式の解き方で2章の方法より3章の方法の方が解きやすいと思った

表1の結果について，分かりやすかったかどうか（理解度）は高い数値だが，身についたかどうか（習熟度）は0.5～0.6ほど低い数値となった。期末試験週間の前（本格的にテスト勉強を始める前）の回答であることも影響している可能性はあるが，この時点での習熟度は残念ながらそれほど高くない自己評価であった（試験後の評価は後述する）。

表2および表3については，明らかな誤植は修正し，学生個人の名前は伏せ，「なし」「特になし」だけの回答計3件は削除してある。結果を見ると，分かりやすさや本実践の利点を指摘するコメントが多数であった。しかし，今回の実践によりやむなく時間短縮した点や板書を減らしたことに対する「副作用」について指摘する声も一部に見られたため，今後の改善の余地がある。例えば，板書をあえて減らしてPDFノートを用いたことで「手を動かす作業がなくなったので定着しにくい」との指摘については，PDFノートの一部を空欄にして学生が書き入れて完成させる形とする，などの改善案が考えられる。

5．2 授業アンケート

また，期末試験終了後の授業最終回にて，Formsによる全科目共通の無記名アンケートを実施した。設問のうち最初の4つの設問は1～5の5段階評価で回答し，最後の設問は自由記述欄である。結果を表4・表5に示す。なお学科アの回答数が少なかったのは，アンケートを実施した授業最終週で欠席者が複数いたためである。

表4 後期末授業アンケート（5段階評価）

線形代数Ⅱ（後期）	学科ア (n=34)	学科イ (n=40)	学科ウ (n=40)
設問1「授業はシラバスに基づき明確な目標・目的が設定され，内容が分かり易く展開されていましたか。」	4.71	4.75	4.75
設問2「先生の白板，教材及び教育機器の使い方は適切でしたか。」	4.82	4.88	4.73
設問3「先生は授業中，理解の度合いを確かめたり等をして，授業への参加を促しましたか。」	4.74	4.80	4.73
設問4「全体としてあなたはこの授業を理解し，目標に到達しましたか。」	4.71	4.60	4.33

表 5　後期末授業アンケート（自由記述欄）

非常に分かりやすかったです。 また数学を担当して欲しいです。
分かりやすかったです
教科書をアレンジしてノートを配って行った講義がわかりやすかった
前期でやったベクトルでは xyz 座標系に落とし込んで、イメージを持ちながら勉強できたんですけど後期でやった行列や行列式は図でイメージすることができなかったのでこれからまた勉強して全体像やイメージを把握したいです。
よかった
PDF など分かりやすくてとても良かったです。
わかりやすかったです
わかりやすかったです
授業は基本的にはとても良かったと思います。 しかし、笠谷先生独自の教材で進めていく時に証明が省かれていたので、そこだけ気になりました。
説明がわかりやすすぎました。ありがとうございました。
少しだけ進むのが早く感じて内容があまり入らない時があった。もう少し板書をとる時間や問題を解く時間がほしい
理解しやすくするためとはいえ、教科書跳び跳びだったのは少し大変でした 授業お疲れ様でした
授業ノートがすごく分かりやすかったです。
中間、期末と 50 以上取れたので、ちょっと嬉しかった
わかりやすい授業資料と説明でした。
前期より分かりやすかった
物理みたいで嫌でした、、
自分の目標に近い点が取れた
途中教科書からプリントにかわり、内容はわかりやすかったけど不便ではあった
授業内容がわかりやすく理解しやすかった
分かりやすかったです
本当にわかりやすい授業をしていただいたのにもかかわらずこんな点数をとってしまったことが申し訳ないです。
実際の普通科高校の数学ではどのあたりでやる勉強なのか、普通校と比べて難しいのか進んでいるのかも交えながら進めてもらえると面白いと思うし勉強のモチベーションアップに繋がると思います
先生のプリントと教科書の二刀流のおかげでとてもわかりやすかった。
授業がとても分かりやすかったです。 また、授業ノートが見やすくまとめてあって、復習する時に便利でした。
プラマイや転置がとても難しかった
どこが大事なのか、次の学年でも必要な知識なのかが分かりやすかったです。 あまり時間がかけられなかったことは反省していますが、これからテストで分からなかった点をおさらいしていけたらと思っています。

表 4 の結果は，全体的に高い数値となった。特に習熟度に関する設問 4 について，表 1 の習熟度に関する設問と比べると，自己評価が高くなっている。設問文が同一ではない点も考慮する必要はあるが，期末試

験に向けた勉強を経験した結果，習熟が深まった可能性がある。また表 5 の結果を見ると，表 2･表 3 と同様，分かりやすいとの声が大多数であったが，やはり本実践の影響を指摘する声も一部にあった。

比較のため，前期末授業アンケートにおける設問 1～4 のデータも表 6 に示す。本格的に授業を再設計する前と後で，評価は大きく変わらず，高い評価であったことが分かる。

表 6　前期末授業アンケート

線形代数Ⅰ（前期）	学科ア(n=40)	学科イ(n=41)	学科ウ(n=41)
設問 1 平均	4.65	4.61	4.68
設問 2 平均	4.75	4.56	4.71
設問 3 平均	4.70	4.51	4.68
設問 4 平均	4.35	4.22	4.27

5.3 定期試験素点

行列分野（後期中間），行列式分野（後期末）の定期試験の素点の状況は表 7 の通りであった。各試験は 100 点満点であるが，一部の難問については解ける問題を自分で選ぶ形式としており，通常より多く解くとおまけボーナス点（後期中間試験では最大 15 点，後期末試験では最大 5 点）が設定されている。結果を見ると，大きく授業内容を再設計した後期末範囲についても定期試験の素点は高く，負の影響はほぼ見られない。

表 7　定期試験素点状況

線形代数Ⅱ（後期）	学科ア	学科イ	学科ウ
後期中間試験平均	82.5	83.0	84.3
後期末試験平均	82.1	84.2	84.6

6. 補足

多重線形･交代性によって行列式を定義，導入すること自体は著者のオリジナルではなく，他にもこれまでに採用例がある。例えば高専向けを念頭に執筆されたと思われる別の教科書[4]では，3 次以上の一般の行列式を多重線形･交代性によって定義している。ただし同教科書では，図形的意味はかなり後になって紹介されており，そこでは多重線形･交代性との関連は明記されていない。

工学系の学生にとって実用上の基礎として重要と思われるポイント（多重線形･交代性，サラスの公式および明示公式，図形的意味）について，多重線形･交代性を起点とすれば，行列式の学習を始めた段階でも最短ルートで紹介し導出することができる。これによって学習者に重要なポイントを強く印象付けられるところに，本授業計画のよさがあると著者は考えている。

7. まとめと今後の課題

多重線形･交代性によって行列式を定義し，その性質から行列式の明示公式や図形的意味を導く授業を設計した。同時に，Teams 等の活用によって授業を効率的に実践した。これらの計画と実践には，事前の様々な準備と伏線も含んでいる。実践の結果として，当該分野の授業実施に要する時間の短縮を果たし，また，学生へ見通しのよい授業を実施することができた。本実践に対する学生の評価は高く，成績も優秀であった。ただし，学生のアンケートには副作用等を指摘する意見も一部にあり，今後さらなる改善の余地がある。

なお紙面の都合で掲載できなかった PDF ノートについては，条件付きで提供可能である。また，本授業計画について，読者のご意見･ご批判を頂ければ幸いである。

８. 謝辞

本稿で述べた授業計画の実践に協力いただいた，2021 年度本校本郷キャンパス 2 年次学生諸君に感謝する。

９. 参考文献

[1] 高遠節夫ほか 5 名,『新線形代数』, 大日本図書, 2012 年初版, 2016 年五版発行.
[2] 高遠節夫ほか,『新線形代数 改訂版』, 大日本図書, 2021 年改訂版第 1 刷発行.
[3] 加勢順子, 長谷川貴之, 河原治, 笠谷昌弘,『偶順列, 奇順列を用いた行列式の定義を学ぶ意義と眼前の必要性について』, 富山高等専門学校紀要, 第 6 号, 2019 年.
[4] 岡本和夫ほか,『新版線形代数 改訂版（新版数学シリーズ）』, 実教出版, 2011 年初版第 1 刷, 2021 年改訂版第1刷発行.