

偶順列, 奇順列を用いた行列式の定義を学ぶ意義と 眼前の必要性について

加勢順子*, 長谷川貴之**, 河原治**, 笠谷昌弘**

On the significance of learning the definition of determinant using
permutation, and on the temporary need of them for students

KASE Junko*,
HASEGAWA Takayuki**,
KAWAHARA Osamu**,
KASATANI Masahiro**

The purpose of this study is to discuss why students should learn the definition of the determinant. In National Institute of Technology, Toyama College, Hongo Campus, students in the second grade learn matrix, determinant, and related topics in the classes of *Linear Algebra*. Matrix and determinant are important tools for engineering course students. However it seems to be difficult for the students to understand the definition of determinants essentially. In this year (2018), unlike to the previous year (2017), students have learned it in a different order. Students seem to understand abstract ideas more easily after learning the concrete computation. At the end of semester, we will compare the learned ability of second grade students in 2017 with that in 2018, in National Institute of Technology, Toyama College, Hongo Campus. It is not necessary for them to learn the definition in the first step, in essential meaning in mathematics, but they are worth learning even in the second step. For us mathematics teachers, in order to bring up prospective engineers who have wide range of point of view, it is worth teaching not only how to compute but also what the definition mean essentially.

キーワード: 線形代数, 行列式, 写像, 置換, 順列

1. 背景

これは数学に限ったことではないが, 教科書とは, 教員が授業で扱う道具であると同時に, 初学者(学生, 生徒)がその扱う分野の内容を学ぶ際に初めて手にとる書物であることが多い. 従って, その役割は重要で, 授業における用い方の違いによっては学生が獲得する学力に大きな差が出る.

今年度, 富山高等専門学校本郷キャンパス 2 学年

* 一般教養科 非常勤講師

加勢 順子

** 一般教養科 数学

長谷川 貴之

河原 治

笠谷 昌弘

「線形代数」の授業の「行列式」において, 授業の進め方を前年(2017 年度)と変えたところ, 僅かだが, 学生は前年と比べると難なく理解しているように感じられる箇所があった. そこで, その反応の良さを見て, 用いる教科書内の順序とは学ぶ順序を変えてみて, 同じ内容における学力差が生じるか否かを, 第1著者は, 試験結果も含めて, 比較してみたいと思うようになった.

行列や行列式は工学, さらには自然科学において重要な役割を果たしており, 将来技術者となる高等専門学校の学生がそれらの理論と技術を学ぶことは必要不可欠である. しかし, 行列式の理論は抽象度の高いものも多く含んでおり, 理解するためには, 学生各自の努力(予習や復習), 授業担当者の工夫など様々な要素が不可欠である. 今まで当たり前のように「線形代数」の授業で扱ってきた「行列式」の, 定義を学ぶ

意義と眼前の必要性について考えてみたい。

この紀要論文は、次のように構成されている。次節の2節で高等専門学校の学生向けに書かれた教科書で導入されている行列式理論について述べ、3節で大学での一般的な線形代数学の教科書における行列式理論を紹介する。4節、5節、6節で、今年度(2018年度)の授業において、前年度と比べて工夫した点を紹介し、今後の課題や、高等専門学校の学生が抽象度の高い行列式理論を学ぶ意義、数学的理論の眼前の必要性について考えてみたいと思う。

2. 高専の教科書で導入されている行列式理論

富山高等専門学校本郷キャンパスでは、4年次開講の「数学特講Ⅱ」で、線形変換(一次変換)という名前で、初めて線形写像の概念に出会うことになる。因みに教科書として使っている参考文献(2)では、線形変換と一次変換とははっきりと分けて定義されていないが、第2著者はこれを教科書として使いながらも、1次変換と線形変換をそれぞれ別に定義した後、結局それらは一致する、という流れで講義している。

行列式の理論は、1対1写像である n 文字の置換を考えることから始まる。関数に幾度となく触れてきているとはいえ、写像による置換の概念は、現在、大学生にとっても理解されにくくなりつつある。まして高等専門学校の2年次で、置換を用いた行列式の定義を理解することはかなりハードルの高いことといえる。本キャンパス第2学年の線形代数の授業でも、教科書として参考文献(2)を使って、行列、行列式理論の指導を行っている。この教科書では、1年次「基礎数学C」で扱う順列を用いて行列式を定義し、その性質を論じている。よって、工学系の学生が教科書として用いる上では、概ね適切な書物といえる。参考文献(2)第3章§1.2で扱われる行列式の理論を以下で述べる。次の P を n 個の異なる自然数を並べてできる順列とし、次の(1)式のように表す。また、自然数を1から n まで小さい順に並べた順列を基本順列と呼ぶ。

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_n) \quad (1)$$

ただし、 $p_1, p_2, \dots, p_n$ は1から n までの相異なる自然数である。具体的に3つの自然数を並べてできる順列を考えよう。例えば1, 2, 3を並べてできる順列の総数は、 $3!=6$ 個あり、全て挙げると、次の(2)式のようになる。

$$\begin{aligned} P = (1, 2, 3), P = (1, 3, 2), P = (2, 1, 3), \\ P = (2, 3, 1), P = (3, 1, 2), P = (3, 2, 1). \end{aligned} \quad (2)$$

(2)式の各順列の()の中の2数を交換することにより、基本順列(1, 2, 3)に変形することを考える。例えば、(1, 3, 2)ならば、2と3を交換、(2, 3, 1)ならば、1と2を交換後2と3を交換することで基本順列に変形できる。順列が、偶数回の交換により基本順列に変形できる場合、偶順列と呼び、奇数回の交換により基本順列に変形できる場合、奇順列と呼ぶ。一般に交換回数が偶数回か奇数回かは、交換の仕方によらず一定に定まることが示される。そこでさらに、順列 P の符号 ε_P を、次の(3)式のように定める。

$$\varepsilon_P = \begin{cases} +1 & (P \text{ が偶順列}), \\ -1 & (P \text{ が奇順列}). \end{cases} \quad (3)$$

これらを踏まえて n 次正方行列 A の行列式を次の(4)式のように定義する。

$$|A| = \sum \varepsilon_P a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}. \quad (4)$$

ただし、 Σ は、順列 P のすべてで和をとることを意味する。この定義により、行列式の重要な性質が示されていく。

3. 大学で一般的な線形代数学における行列式理論

第1筆者は金沢大学でも「線形代数学」の授業を担当している(非常勤)。この節では、そこで使われてい

る大学での平均的な教科書(参考文献(1) §3.1)に従って、「線形代数学」における行列式の理論を紹介する。1 から n までの異なる自然数を 1 番目から n 番目までのいずれか 1 つの場所に移す 1 対 1 写像 σ を考え、 σ を 2 行 n 列の行列により、次の(5)式で表す。

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}. \quad (5)$$

下の段(2 行目)の自然数はそれぞれ上の段(1 行目)の真上にある自然数の行き先の場所(順番)を表す。すなわち、写像の表現を使えば、 $\sigma(1) = k_1$, $\sigma(2) = k_2$, ..., $\sigma(n) = k_n$ を意味する。この σ を n 文字の置換と呼び、 n 文字の置換全体からなる集合を S_n と表す。

具体的に 3 文字の置換を考えよう。1, 2, 3 を 1, 2, 3 のいずれかに移す置換 σ の総数は、下段に 1, 2, 3 を並べる方法の総数に等しく、 $3!=6$ 個であり、全て挙げると(6)式のようになる。

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}. \quad (6)$$

次に、巡回置換、互換、そして置換の積について説明する。 n 個の自然数 1 から n までのうち、一部の r 個を次の(7)式のように移す置換 σ を巡回置換といい、(8)式のように表す。

$$\sigma = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_r \\ k_2 & k_3 & \cdots & k_1 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\sigma = (k_1 \ k_2 \ \cdots \ k_r). \quad (8)$$

例えば、3 文字の置換(6)式において、4 つ目の置換は $(1 \ 2 \ 3)$ と巡回置換で表すことができる。巡回置換のうち、特に 2 文字の巡回置換を互換という。つまり、 $(i \ j)$ とは i と j を交換し、その他の文字は動かさない置換である。具体的には(6)式の最後の置換は、1 と 3 を交換し 2 を動かさない置換なので、 $(1 \ 3)$ と表すことができる。また、2 つの n 文字の置換 σ , τ の積 $\sigma\tau$ を次の(9)式

で定義する。

$$\sigma\tau(i) = \sigma(\tau(i)) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (9)$$

例えば、3 文字の置換の積 $(3 \ 1 \ 2)(1 \ 2 \ 3)$ を求めてみよう。 $\sigma = (3 \ 1 \ 2)$, $\tau = (1 \ 2 \ 3)$ とすると、 τ により 1 は 2 に移り、さらに σ によって 3 に移る。つまり、1 は $\sigma\tau$ で 3 に移る。同様にして 2 は $\sigma\tau$ で 1 に移り、3 は $\sigma\tau$ で 2 に移る。従って、 $\sigma\tau = (1 \ 3 \ 2)$ と表すことができる。一般に、任意の置換はいくつかの巡回置換の積で表すことができ、任意の巡回置換はいくつかの互換の積で表すことができることが知られている。また、次の(10)式が成り立つ。

$$(k_1 \ k_2 \ \cdots \ k_r) = (k_1 \ k_r) \cdots (k_1 \ k_3)(k_1 \ k_2). \quad (10)$$

すなわち、任意の置換はいくつかの互換の積で書き表すことができる。置換を互換の積により表したとき、偶数個の互換の積により表せる場合、偶置換と呼び、奇数個の互換の積により表せる場合、奇置換と呼ぶ。ただし、置換の互換の積による表し方は一通りではない。しかし、偶数個の互換の積になるか奇数個の互換の積になるかは一定に定まることが知られている。 n 次正方行列 A に対して、その行列式を、次のように定義する(参考文献(1) §3.2)。

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}. \quad (11)$$

ただし、符号 $\text{sgn}(\sigma)$ は、

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} +1 & (\sigma \text{ が偶置換}) \\ -1 & (\sigma \text{ が奇置換}) \end{cases} \quad (12)$$

である。一般的に大学 1 年次の線形代数学で用いられる教科書(参考文献(1) が例)において、概ね、この形式で行列式を定義している。また、この節で述べた内容は、工学系の学生は将来あまり用いないが、数学では群論や抽象代数学の入り口となる内容である。実

際, S_n は置換の積について群となり, n 次対称群と呼ばれる.

4. 2018 年度の試み

参考文献(2)の順序に従い授業を進めていくと, (4)式の周辺で困難を感じる学生が少なくなかった. そこで今年度(2018 年度)は, 一度, 本紀要論文 2 節に対応する内容をとばして先に進み, 後から戻って学習することにした. 実際には 2 次, 3 次の行列式の求め方を半ば公式として紹介した. 特に 3 次の行列式計算は「サラスの方法」と呼ばれているものである. 行列式の諸性質はいったん証明なしに説明した. 諸性質を紹介し余因子展開の方法を見てもらい, 学生が 4 次以上の行列式の計算ができるようになった後, 改めて, 本紀要論文 2 節の内容を導入した. 具体的な行列式の例にふれ, 計算力のある程度つけているためか, 僅かだが, 前年度と比べて躓くことなく理解をし, 大きな困難はなかったように思われる. 行列式の厳密な定義を最初に学ぶ眼前の必要性はなかった, ということが示唆される.

5. 定期試験での比較

前年度(2017 年度)は, 参考文献(2)の教科書の記載順序に従い, (4)式から行列式の理論を始めており, 難解に感じた学生も少なからずいた. 本年度も 2 月初旬に後学期期末試験があり, 行列式を範囲として前年度と同レベルの難易度の問題を出題するが, 同範囲の定期試験において学力の比較をする計画である.

6. (4)式の定義を学ぶ意義

残念ながら, 工学を専門として学ぶ学生にとって, 行列や行列式は「使いこなすこと」のみが目標・興味関心の対象となり, 数学的な意味や抽象的な理論は, 時として無意味, あるいは不必要と感じがちであるようで

ある. それでも, 私たち数学の教員としては時間の許す限り, 授業で本質的な意味を丁寧に説明していくべきであると考え. 本紀要論文 2 節で述べた内容も, 余裕のない制限のきつい授業時間内で, なるべく扱うことができればと思っている. 短期的には達成できないが, 抽象度の高い内容を考えさせることにより, 長期的に見れば学生の演繹的思考力を上げることができる. また, 個人差はあるが, 例えば 4 学年次で「数学特講 II」を学ぶときのように, 時間が経過した後, 2 学年次で理解できなかった理論が分かってくる, ということもあり得る.

将来, 視野の広い技術者になってもらうために, 厳密な定義のもとで, 証明を基礎とした数学的な理論の学習機会を提供することは, 必要かつ大切なことであり, 行列式の厳密な定義を学ぶ意義は十分ある, と我々著者は確信している.

参考文献

- (1) 三宅敏恒『入門線形代数』培風館 (1991)
- (2) 井川治, 確氷久, 金子真隆, 他『新線形代数』大日本図書 (2012)