高専数学を学生自身のものにするための指導法 そのⅡ

金山　　證※

An Approach to Teaching Mathematics to Technical College Students: How to Make It Easy for Them to Understand Part Ⅱ

Satoru KANAYAMA

Abstract

The author points out three important aspects of the teacher's role in teaching mathematics to technical college students.

In order to help them absorb what they learn, the teacher need to: 1. clarify where, how and why they suffer setbacks in studying mathematics; 2. constantly review and improve teaching methods and materials considering the students' actual levels of achievement; and 3. support independent learning.

1　はじめに

問題解法には解に至る筋道を見通したりする力（洞察力），解法が閃いたりする力（直観力）が大切である。洞察力や直観力を養うには納得のいく解法の追求，別解を含めた解法の研究の継続・習慣化が要求される。初めは時間がかかったり，理解が難解な場合は苦しみも伴なったりして辛くて投げ出しそうになる，そんな時，友人の指摘からさらりと解決することもあろうし，或いは教師に質問して疑問を解消することもあろう。この積み重ねが解に至る筋道を見通したりする力，解法が閃いたりする力を養成していくのである。数学に対して絶え間ない切磋琢磨と持続性を怠ると洞察力と直観力が貧弱なものになる。数学解決力，さらに数学の学習意欲にも影響する。

高専数学を学生自身のものにするための指導には３つの重要なことがらを挙げることができる。

（１）　教師は学生がつまずく実態とその原因を明確にする。

（２）　教師は学生の実態に合わせて教材や指導法の見直しと改良・工夫を常に心掛ける。

（３）　教師のはたらきかけと学生の主体的な取り組みの二つの側面が不可欠である。

「高専数学を学生自身のものにするための指導法Ⅰ」においては数学のあらゆる分野の基礎概念の把握及び，計算力や論理的記述力の養成を目標として，教科書を教える観点を変換して，教科書で教える観点から，主に四つの側面，Ⅰ教材の見直しと改良，Ⅱ指導法の見直しと工夫，Ⅲ授業形態について，Ⅳ学習の仕方の確立，から高専数学の全体を通して考察した。

また，Ⅱ指導法の見直しと工夫において，（３）授業実践で心掛けていることとして，特に，板書事項に焦点を当てて記述した。

さて，「高専数学を学生自身のものにするための指導法Ⅱ」においては，次の７点，

（１）　高等専門学校に移行した中学校の数学の一部が，高等専門学校の数学の指導をより難しくしている要因となっていること

（２）　学生の実態として，昨年度（平成19年度），本年度（平成20年度）の入学生から目立ったこと

（３）　洞察力と直観力を養成するには，高等専門学校に入学し，なるべく早い時期に学習の仕方を確立して学習の習慣化を図ることが欠かせないこと

また，「高専数学を学生自身のものにするための指導法Ⅰ」において触れられなかった，

（４）　授業実践で心掛けていること

（５）　授業実践で心掛けていることの事例

（６）　数学の分かり易い指導を目指して，①板書，②解説，③演習，の３つの場面からの考察

※教養学科（教授）

（平成21年３月31日受付）

（7）　問題点
から考察を加えて，更に詳細に記述していきたい。

2　高等専門学校に移行した中学校の数学の内容

数学において，中学校の内容の一部が高等専門学校に移行したのに伴って，中学校と高等専門学校の数学の内容のレベルの差がこれまで以上に歴然としてきた。中学校で成績上位者であったものが必ずしも高等専門学校で上位者に入るとは限らない。逆に，中学校で成績中・下位者であったものが，高等専門学校で上位者に入る場合もある。成績のぶれが大きいのである。これは中学校で取り扱う数学の基本的な概念が狭められた範囲の域に抑えられたこと，高等専門学校の数学の履修時間は不変であるのに，一部とはいえ，高等専門学校に移行したことにより，そこでの内容が盛り沢山となったこと，基礎的な概念を身につけさせながら，応用力までを養成させなければならなくなった事柄が増えたといってよいであろう。

（1）　移行された10の内容
①数の集合と四則，②一元一次不等式，③二次方程式の解の公式，④いろいろな事象と関数，⑤相似形の面積比・体積比，⑥球の表面積・体積，⑦三角形の重心，⑧円の性質の一部，⑨資料の整理，⑩標本調査

（2）　高等専門学校の数学に影響を及ぼしている内容，特に移行した内容の中で高等専門学校の数学に影響を及ぼしているめぼしいものについては

①　中学校で指導されていない箇所が以前に比べて増加して，関連する内容が狭い範囲に限定されて内容を深く追求するものになっていないために理解が深まらない。

・二次方程式における解の公式を利用した因数分解
・集合と論理　不等式の解法を利用した命題の逆・裏・対偶の例

②　関連分野はもちろん他の分野でも計算力・論理的記述力が落ちている。例えば，不等式が未習のために方程式も貧弱な知識・理解に留まっている。簡単な計算でもミスが目立ち，計算力の弱さが目につく。

③　抽象的な概念の把握は難しいことは明らかである。例えば，幾何における接弦定理を用いた証明が未習なために新カリキュラムで学んだ学年は論理的記述力の弱さが目につく。

次に，分野別に詳細に見てみると

①　不等式では，一次不等式から始まって，不等式の概念形成，基礎的な力をつけながら，二次・高次不等式に関する応用問題まで扱わなくてはならない。これまで中学校で一次不等式が指導されていた場合には，二次不等式の定着が良かったのであるが，短時間で不等式の概念形成を図りながら基礎的な力をつけるまで至っていないのであろう，二次不等式の定着率が悪いようである。

また，二次不等式が基礎となって高次不等式の理解が得られるのである。高次不等式の解法を苦手としている。更に，中学校で一次不等式が指導されていた場合には，二次方程式の判別式を用いて解の種類を見分ける問題では不等式を上手に駆使して処理できていた。しかし，一次不等式が指導されていない現在では，処理しづらくなっている。

必要条件·十分条件の概念の理解には一次不等式を用いた事例が少なくない。一次不等式は必要条件·十分条件の概念を確実なものとして理解させるには欠かせないものとなっている。

②　二次方程式の解の公式では，まず公式を導くところから出発して，暗記した公式を用いて二次・高次方程式に関する応用問題まで扱わなくてはならない。また，二次方程式の解の公式では様々なことを学習する。

・解の公式の導き方では完全平方式への式の変形をする点では二次関数の標準形に通じるものがある。
・暗記した公式を適用して解法する。因数分解できない問題でも二次方程式の求答可能である。
・他の分野と共有する概念が多いこと，またその概念を深化させる。四則演算の定着，二次の係数が無理数の場合の分母の有理化，分母と分子の約分，特に一次の係数が偶数の時の解の公式の適用，２重根号のはずし方，開平法（根号の開き方）

③　円の性質では，円の半径と接線の関係や円周角と中心角の関係，円周角については，同じ弧に対する円周角が等しいことは中学校で学んでいる。

しかし，それ以上の概念，すなわち，円周角の定理の応用である接弦定理から出発して，それを利用する応用問題まで扱わなくてはならない。これまで接弦定理に関する証明問題を中学校で経験していたことから，高等専門

学校で学ぶ数学に対して柔軟な思考，論理的な推論や証明の仕方・手順がある程度できていたように思う。これを中学校で学ばないことで直観を働かせたり，関係を見抜いたりすることを通して，発想を大事にしたり，深く考えたりするような経験がないままに入学している。証明問題にかなり手こずっているようである。

3　昨年度（平成19年度），本年度（平成20年度）入学生から目立ったこと

次の６項目が挙げられる。

（１）　学習意欲の低下

・疑問点については自分が納得するまで追求して解決するまで頑張る根気強さに欠ける。

・授業中の演習では実際に鉛筆を走らせて解こうとしない。板書された解けない問題の解答や解法の優れたものだけでなく，始めから終わりまでの全問ノートする学生が少なくない。

・授業後や放課後の質問が少ない。

・定期試験直前の演習（教科書の問の抜粋）のプリントの見直しが不充分である。授業中に解けた問題が定期試験になると解けない。

（２）　暗記力の弱さ

・成績上位者を除いて，教科書のみの練習問題を解いていては公式や定理が暗記できない。公式や定理が身についていないために問題が解けない。

・成績中・上位者を除いて，基本的で容易に解ける新しい問題や数値を変えた問題を解くことを通して公式や定理を暗記させようとするが身につかない。

・成績中・上位者を除いて，授業中に公式や定理そのものを暗記させる時間を保証し，繰り返して口述する訓練を図るが身につかない。

（３）　計算力のなさ

・四則計算に習熟していないために素早く処理できない。時間がかかりすぎて，制限時間内に問題が解けない。

・過年度の学生と比較して授業時間内に処理できていた問題が少なくなっている。

（４）　豊かな発想・柔軟な思考の不足

・「いろいろ複雑な要素を組み合わせた問題や新しい傾向の問題に対して習っていないので解けない。とてもできない。」といった観念が強く，自分の頭を使って考えようとしない。

・章末の練習問題に対して，ヒントをつけても解けない。

（５）　課題レポートの不備・未提出

・レポートが中途半端なまま，また，いい加減な解答で提出する学生の割合が高い。

・レポートの提出期限が守られない。遅れて提出する学生が少なくない。

・レポートの作成ができない。提出しない学生の割合が学年進行につれて高くなっている。

（６）　ライバル意識の欠如

・友人には負けたくない。自己を切磋琢磨するような努力のなさを嘆くことがない。

・友人の確実に計算する，上手に変形する，筋道を立てて証明する等の良さを学びたい，或いは良さを取り入れる熱意を持ち合わせていない。

4　学習の仕方の早期確立

高等専門学校において学習の仕方を早く，確実に確立させた学生が成績上位者になっている。また，五年生になって志望の大学に受験して合格するためにも大きな力となっている。この点から高等専門学校で入学当初から，学習の仕方を確立できるように手立てを取ることの重要性が以前にも増しているのである。学生自身が学習の継続・習慣化を早く図り，高専数学を一歩一歩きちんと身につけながら新たな分野・領域に挑戦していくことが大切である。

5　授業実践で心掛けていること

数学のあらゆる分野の基礎概念の把握及び，計算力や論理的記述力の養成を目標として，教科書で教える観点から高専数学の全体を通して考察してきた。それらの中の，指導法の見直しと工夫における，６授業実践で心掛けていることとして，その具体例を①～⑰の項目にわたって述べる。とりわけ，項目⑪取り扱う必然性のある例題を通して，興味・関心や学習意欲を高め，学び方を習得させる，その具体例として２重積分における積分順序の変更が真っ先に浮かんだ。「取り扱う必然性のある例題を通して学習意欲を高め，学び方を習得させる，このような例題が他にもないだろうか」と今まで授業実践を通して用いたものを振り返って見ることにした。ここに各分野における有効な事例を紹介する。

平成14年度高等学校教育課程実施状況報告書に触れる機会があった。それによると，指導の改善として，４項目が記載されていた。その第１番目に，数学学習の意義や必要性を実感する授業となるよう工夫すること，が挙げられていた。取り扱う必然性のある例題を通して学習意欲を高め，学び方を習得させ，強いては学生の実力を伸張することができることに意を強くし

たものである。

6　授業実践で心掛けていることの事例

① 新しい概念，記号，用語，定義，公式や文字の使用に関する歴史的背景やエピソードを盛り込むことで興味を持たせる

・ド・モルガンの法則

ド・モルガン（1806～1871）はフランス生まれのイギリスの数学者確率論・論理学の貢献で認められた。科学通俗化の功績があった。英国ケンブリッジ大学で教鞭を執った。この人とブール（1815～1864）との二人が論理代数の創始者といわれている。数学教育改革を叫び教科書を著し，イギリスの算術，代数及び幾何が漸く教育的な形を整えるに至った。

② 個々の解法やその根底となる考え方や公式どうしを関連づけるような包括的，統一的に見るような大局的な捉え方に着目させる。

ⅰ　２項定理展開公式 パスカル（1623～1662）の３角形の紹介

ⅱ　対称式・交代式の問題［１］因数分解，［２］計算が容易になる。

③ 別解を示すことにより，解法の幅を広げ，内容を深く追求する

ⅰ［１］２次３項式の因数分解

［解１］１文字で降べきの順に整理→たすき掛け

［解２］２文字で降べきの順に整理→次数が２次の部分を因数分解→共通因数を見出す

［解３］２次方程式の解の公式

［解４］因数定理

［２］文字に関する３次式の因数分解

ⅱ　点の直線に関する対称点の座標

ⅲ　数学的帰納法

ⅳ　数列の漸化式　隣接２項間の関係

④ 定義・公式 文字式を言葉の式で置き換える

ⅰ　被除式 ＝ 除式×商＋余り

整式Ａを整式Ｂで割ったら商がＱ，余りがＲであった。この整式Ａを求めよ。

Ａ ＝ Ｂ×Ｑ＋Ｒ　ただし，Ｒは０かＢより次数の低い整式

ⅱ　連続：極限値＝関数値

ⅲ　中間値の定理

関数が・閉区間で連続，・端点の関数値が異符号のとき

開区間に方程式：関数＝０の実数解が存在する。

ⅳ　平均値の定理

・閉区間で連続，・開区間で微分可能のとき，開区間に，両端の２点の平均変化率＝変化率となる点が存在する。すなわち，両端の２点を結ぶ線分の傾きに等しい接線が引けるような接点が開区間に存在する。

⑤ 図示できるものについては，式の標準形を図と対応させて解説する。

ⅰ　楕円

ⅱ　双曲線

ⅲ　放物線

⑥ 用語や定義の曖昧さを解消する

ⅰ　平面上の２直線のなす角α，αは０度以上90度以下

２つのベクトルのなす角ϕ，ϕは０度以上180度以下

ⅱ　収束・発散の分類

〔１〕収束する：極限値は一定の値（有限確定値）

〔２〕発散する：〈１〉正の無限大〈２〉負の無限大〈３〉振動する（極限はない）

⑦ 例題の補充

絶対値記号のついた不等式

⑧ 上手な覚え方を導入して公式への興味･関心を高める

ⅰ　三角比

ⅱ　三角関数の加法定理以下一連の定理

ⅲ　対数の定義

ⅳ　逆三角関数の定義

⑨ 公式の用い方に段階を設けて確実に用いる。

部分積分法（繰り返して公式を適用する場合も含む）

⑩ 公式における記号の統一化

ベクトル

⑪ 取り扱う必然性のある例題を通して学習意欲を高め，学び方を習得させる。次の11の分野から，紹介する。Ⅰ因数分解　Ⅱ式の値　Ⅲ数と集合と命題　Ⅳ２次方程式　Ⅴ高次方程式　Ⅵ２次関数　Ⅶ２次曲線（円）　Ⅷ三角比・三角関数（三角形の形状）　Ⅸ行列・行列式（連立方程式，逆行列）　Ⅹ微分法　Ⅺ積分法（２重積分（積分順序の変更）も含む）

⑫ 指導の軽重

中学校で指導されている箇所は軽く，指導されていない箇所，式の計算における展開は答えが３次式以上，因数分解は２次３項式，３次式・文字式を重点的に指導する。

⑬ 発展的な教材を取り入れることによって，既習の概念の理解を見直し，深める。また，より高度な概念への展開を容易なものとする。

ⅰ　数列の漸化式　隣接２項間の関係から隣接３項間の関係へ拡張

ⅱ　多重積分　２重積分の計算から３重積分の計算へ拡張

⑭　微分・積分では教科書以外にも公式化して用いると計算が素早く，容易にできる。

ⅰ　微分

ⅱ　積分

⑮　曲線の直交座標によるⅰ面積の公式を，〔1〕定積分との関係，〔2〕部分求積法，この2つの観点から導く。

更に，定積分との関係から　ⅱ体積　ⅲ回転体の体積　ⅳ長さ　ⅴ表面積の公式を導く。

⑯　曲線の媒介変数表示によるⅰ面積，ⅱ長さ，ⅲ回転体の体積・表面積の公式を直交座標による場合の公式から導く。（公式を暗記しないで用いることができる）

また，曲線の極座標によるⅰ面積の公式を定積分との関係から導く。次にⅱ長さの公式を媒介変数表示による場合の公式から導く。（公式を暗記しないで用いることができる）

⑰　その他

ⅰ　用語を用いると表現が簡潔になる。

複号同順

ⅱ　図示をしてまとめると関係が捉え易い。

命題とその逆・裏・対偶の関係

ⅲ　いろいろな証明方法を知って，問題に対して柔軟な解法ができる。

証明法の種類

〔1〕直接証明法

〔2〕間接証明法 ・対偶法

・背理法

・転換法

7　数学の分かり易い指導を目指して

分かり易い指導の観点として

（1）板書，（2）解説，（3）演習の3つの場面から考察をする。

（1）　板書

①　ホワイトボードにおける黒，青，赤のマジックの使い分け

黒…通常に用いる。

青…用語，公式・定理や解法での重要な箇所の書き込みに用いる。

赤…強調したい箇所にアンダーラインや枠で囲む。解法の添削と正しい答えの時は○つけに用いる。

②　板書事項

ⅰ　定義，用語の解説，公式・定理の提示とその証明

・定義や公式・定理は四角枠で囲む

・定義，用語とその解説

・提示した公式・定理を導く→必要に応じて公式の暗記，覚え方の提示

ⅱ　例・例題の提示・解法→解法を示しながら複雑なものは解説事項（関連公式，定理，例題）の記述，答案の書き方の明示，ときには別解の提示

・教科書の例題や節末や章末の練習問題の類題→例題の確定（教科書の例題そのもの，教科書の例題を改良したもの，独自の例題）

・例題は四角枠で囲む

・例題の解法のステップ毎の意味づけ→解説事項のステップ毎の重要な項目に番号をつけたものの板書による明示

・用いた公式・定理の見直し→解法の板書事項の横に板書して提示

・用いた公式の強調

・関連例題の見直し

（2）　解説

ⅰ　板書しながら同時に解説をすることでは内容の理解の未消化が起きる。板書と解説を区別する。

ⅱ　板書後5～7分の間はノートを取り終わるまで待つ。取り終わった後に解説する。

ⅲ　重要なところとそうでないところのメリハリをつけて解説する。

ⅳ　黒板に注目させ，解説を聞くことに集中させる。配慮すべきこと

・黒板に集中させる。→黒板を軽く叩いてこれから解説を始めることの合図をする。

・鉛筆を机上に置かせ，俯いているものは顔を上げさせる。

・寝ているものに一声をかける。

・しゃべっているものに注意を喚起する。

注意：教師が話しているときは静かに聞くことを徹底させる。

（3）　演習

ⅰ　教科書の問題の板書による提示，解法の仕方について

・問題は四角枠で囲む

・基本的には学生による解答の板書→教師の添削→模範解答の提示

場合によっては教師が解答

・解法に合わせて問題のステップ毎の意味づけ

・用いた公式・定理の見直し

・用いた公式の繰り返しによる暗記の徹底

・関連問題の見直し

ⅱ　教科書の問題のプリントによる提示，解法の仕方について
・教科書の問題で授業で取り上げたもの，問題の数字を変えたもの，簡単な類似問題を取り扱う。
・基本的には学生に解答を記述させる。
・解けない問題の質問やヒントを受けつける。
・指定された期日までに提出させる。
家庭学習（各自作成した解答を○つけしたもの）→１週間後提出→教師の添削とA，B，C，D，E（Eランクは再提出）のランクに評価→平生点に加点
・教師のプリントによる模範解答→自己の解答の添削と見直し→定期試験対策に利用

ⅲ　問題解法への取り組みについて
・基本的な問題
学生による解答の板書と板書事項の説明→教師による添削→模範解答
場合によっては教師が解答
・やや難解な問題
教師によるヒントを参考として学生による解答。
現在の学生の実力から見て，過去の学生の取組み方と比較しながら，問題を下記の［ア］，［イ］，［ウ］の３種類に分類する。
［ア］，［イ］と判定されるときは学生を指名し責任を持って解答させる。
［ア］解法に時間が余りかからない問題のとき，解答をその授業時間内で板書
［イ］解法に時間がかかる問題のとき，次時に新しい練習問題の解法と同時に解法を板書
［ウ］解法が難解な問題のとき，教師による解答をその授業時間内で板書して解説
・例題に取り上げたレベルを超えた問題
適当な例題もなく問題が与えられている場合もあって学生は解けない。このようなときは適当な例題や問題の数字を変えて例題として解法を付記して板書する。問題を家庭学習として取り組ませる。
・教科書の各章の節末の練習問題A･Bの問題
各章の節が終わる直後に実施。事前にヒント（問題毎にヒントを書いて全問で１から２枚）を配布→家庭学習（各自解答を○つけしたもの）→１週間後提出→教師の添削とA，B，C，D，E（Eランクは再提出）のランクに評価→平生点に加点
・問題集A・Bの問題
長期休暇に実施。事前にヒント（問題毎にヒントを書いて全問で２から３枚）を配布→家庭学習→休暇明けに提出→教師の添削とA，B，C，D，E（Eランクは再提出）のランクに評価→平生点に加点

8　問題点

（1）　学習力と学習意欲の低下
学習力と学習意欲の低下により数学の実力が身についていかないことが危惧される。
・対策として，学生の現状に会わせて授業の進度を遅くせざるを得ない。
・授業の進度を遅くすると演習の時間の確保が難しくなる。さらに，応用・発展問題を取り上げる余裕をなくした授業展開となっていく。

（2）　問題演習量の不足
基本的な問題の学生による解答の板書をできるものの数が学年が上がるにつれて減っている。
・対策として，基本的な問題を解く力をつけることを中心に据えて，例題の解法の板書事項の丁寧な説明，その繰り返しや，練習問題における教師の模範解答を増やさざるを得ない。
・基本的な問題を解く力をつけることを中心に据えて授業をすると，ますます学生の自主的で能動的な取り組みをさせる機会が少なくなり，数学を努力，工夫して身につけるという経験が乏しくなっていく。苦労して身につけたものは残るが，この場合，残らず，本当の意味での数学の実力を積み重ねていくような力にはなっていかない。

（3）　課題の制限
旧課程で学んだ学生と異なり新課程で学んだ学生は教科書の各章の節末の練習問題Bの問題や問題集Bの問題に対して，ヒントをつけても解けない学生が多くなり，解答に至る過程の記述を重視した解法レポートの作成は困難なものとなっている。したがって，Bのレベルの問題を家庭学習に課すことはできなくなっている。
・対策として，基本的なものの充実に重点を置いた問題を中心とする授業にせざるを得ない。
・基本的なものの充実に比重をかけた授業をすると，やや難解な問題を取り上げる時間がなくなり，柔軟な思考や数学の真の実力（応用力）を養うことが難しくなっている。

9　項目６授業実践で心掛けていることの事例の実際

②ⅰ　$\boxed{(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3\ (\text{複号同順})}$

係数→パスカルの三角形

$(a+b)^0=1$

$(a+b)^1=a+b$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

ⅱ　対称式：どの２つの文字を交換してももとの式と一致する。

交代式：どの２つの文字を交換してももとの式の符号を変えた式に一致する。

[1] 対称式が１つの整式を因数とするならば，この因数で文字の変換をした式も因数である。

$\boxed{a,\ b,\ c\ \text{についての対称式は，}a+b\ \text{を因数にもつと，}b+c,\ c+a\ \text{も因数にもつ。}}$

（ア）$\boxed{\text{例}\quad ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+2abc\ \text{を因数分解せよ。}}$

［解１］　a について整理すると

（変形）　与式 $=(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+bc(b+c)$

$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$

$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$

$=(b+c)(a+b)(a+c)$

$=(a+b)(b+c)(c+a)$ 〃

［解２］　$F(a)=ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+2abc$ とおくと，

a と b を交換する。　与式 $=ba(b+a)+ac(a+c)+cb(c+b)+2bac$

$=ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+2abc=F(a)$　対称式

$F(-b)=0+bc(b+c)-cb(c-b)-2b^2c=0$

（因数定理）$F(a)$ は $a+b$ を因数にもつ対称式であるから，$a+c$，$b+c$ も因数

$F(a)$ を $(b+c)(a+b)(a+c)$ $\left(\begin{array}{l}=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}\\ =(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)\end{array}\right)$

で割って商１を得る。

よって，$F(a)=(b+c)(a+b)(a+c)$

$=(a+b)(b+c)(c+a)$ 〃

$$\begin{array}{r|llll} & 1 & & & \\ b+c\quad (b+c)^2\quad bc(b+c) & b+c & b^2+2bc+c^2 & bc(b+c) \\ & b+c & (b+c)^2 & bc(b+c) \\ \hline & & & 0 \end{array}$$

（イ）$\boxed{a,\ b,\ c\ \text{についての交代式は，必ず}\ b-c,\ c-a,\ a-b\ \text{を因数にもつ。}}$

$b-c$，$c-a$，$a-b$ は既約整式であり，互いに素であるから

差積 $(b-c)(c-a)(a-b)$ を因数にもつ。

［証］　交代式 $f(a,\ b,\ c)$ に互換 $(a,\ b)$ を行えば、交代式の定義より

$f(b,\ a,\ c)=-f(a,\ b,\ c)$

a に b を代入すれば，　$f(b,\ b,\ c)=-f(b,\ b,\ c)$

$\therefore\ f(b,\ b,\ c)=0$

因数定理により $f(a,\ b,\ c)$ は $a-b$ を因数にもつ。

同様にして，$f(a,\ b,\ c)$ は $b-c$，$c-a$ を因数にもつ。（終）

（ウ）$\boxed{\text{例}\quad a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\ \text{を因数分解せよ。}}$

［解１］　a について整理すると

（変形）　与式 $=(-b+c)a^2+(b^2-c^2)a+(bc^2-cb^2)$

$=-(b-c)a^2+(b+c)(b-c)a-bc(b-c)$

$=-(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=-(b-c)(a-b)(a-c)$

$=(a-b)(b-c)(c-a)$

［解２］　$F(a)=a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$ とおくと，$F(b)=F(c)=0$

（因数定理）$F(a)$ は，$a-b$，$a-c$ を因数にもつ。さらに，$a-b$，$a-c$ は既約整式であり，互いに素であるから，$F(a)$ は $(a-b)(a-c)(=a^2-(b+c)a+bc)$ を因数にもつ。

$F(a)$ を $a^2-(b+c)a+bc$ で割って，商 $-b+c$ を得る。

よって，$F(a)=(a-b)(a-c)(-b+c)$

$=(a-b)(b-c)(c-a)$ 〃

$$\begin{array}{r|lll} & -b+c & & \\ 1\quad -(b+c)\quad bc & (-b+c) & (b+c)(b-c) & -bc(b-c) \\ & -b+c & (b+c)(b-c) & -bc(b-c) \\ \hline & & & 0 \end{array}$$

［解３］　$f(a,\ b,\ c)=a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$ とおく

（交代式）$f(b,\ a,\ c)=b(a^2-c^2)+a(c^2-b^2)+c(b^2-a^2)=-f(a,\ b,\ c)$

同様にして，$f(c,\ b,\ a)=f(a,\ c,\ b)=-f(a,\ b,\ c)$　よって，$f(a,\ b,\ c)$ は交代式

したがって，$(a-b)(b-c)(c-a)$ を因数にもつ。

$(b-c)\{(a-b)(c-a)\}=(b-c)\{-a^2+(b+c)a-bc\}$

$=-(b-c)a^2+(b^2-c^2)a-bc(b-c)$

$=a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$ を得る。

ゆえに，$f(a,\ b,\ c)=(a-b)(b-c)(c-a)$ 〃

［2］ $\boxed{\text{対称式は基本対称式で表されることが知られている。}}$

$x_1,\ x_2,\ x_3$ の基本対称式	$x_1,\ x_2$ の基本対称式
$s_1=x_1+x_2+x_3$	$s_1=x_1+x_2$
$s_2=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$	$s_2=x_1x_2$
$s_3=x_1x_2x_3$	
$S_2=x_1^2+x_2^2+x_3^2=s_1^2-2s_2$	$S_2=x_1^2+x_2^2=s_1^2-2s_2$
$S_3=x_1^3+x_2^3+x_3^3=s_1^3-3s_1s_2+3s_3$	$S_3=x_1^3+x_2^3=s_1^3-3s_1s_2$

例　$x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，$y=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ のとき次の値を求めよ。

（1）x^2-xy+y^2　　（2）$\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}$

$$x+y=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=10$$

$$xy=\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}+\ 2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)=1$$

［解］（1）$f(x,\ y)=x^2-xy+y^2$ とおくと，$f(y,\ x)=y^2-yx+x^2=f(x,\ y)$ 対称式

$f(x,\ y)=(x+y)^2-3xy$
$=10^2-3\cdot 1$
$=97$ 〃

（2）$g(x,\ y)=\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}$ とおくと，$g(y,\ x)=\dfrac{y^2}{x}+\dfrac{x^2}{y}=g(x,\ y)$ 対称式

$$g(x,\ y)=\frac{x^3+y^3}{xy}$$
$$=\frac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{xy}$$
$$=10^3-3\cdot 1\cdot 10=970 〃$$

また，（1）を利用して $g(x,\ y)=\dfrac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{xy}=10(97)=970$ 〃

③ i ［1］ $\boxed{\text{例}\ \ x^2+2xy-3y^2-3x-5y+2\ \text{を因数分解せよ。}}$

［解1］ x について整理すると，

与式 $=x^2+(2y-3)x-(3y^2+5y-2)$
$=x^2+(2y-3)x-(y+2)(3y-1)$
$=\{x-(y+2)\}\{x+(3y-1)\}$
$=(x-y-2)(x+3y-1)$ 〃

$$\begin{array}{lcl} 1 & -(y+2)(3y-1) & \\ \hline 1 & -(y+2) & \longrightarrow -y-2 \\ 1 & 3y-1 & \longrightarrow 3y-1 \\ \hline & & 2y-3 \end{array}$$

［解2］ 与式 $=(x^2+2xy-3y^2)-(3x+5y)+2$（$x$，$y$ で整理）
$=(x-y)(x+3y)-(3x+5y)+2$
$=(x-y-2)(x+3y-1)$ 〃

$$\begin{array}{lcl} (x-y)(x+3y) & 2 & \\ \hline x-y & -2 & \longrightarrow -2x-6y \\ x+3y & -1 & \longrightarrow -x+y \\ \hline & & -3x-5y \end{array}$$

［解3］ $f(x)=x^2+(2y-3)x-(y+2)(3y-1)$ とおく。

$f(y+2)=(y+2)^2+(2y-3)(y+2)-(y+2)(3y-1)$
$=(y+2)\{(y+2)+(2y-3)-(3y-1)\}$
$=0$

$$\begin{array}{lll|l} 1 & 2y-3 & -(y+2)(3y-1) & \underline{y+2} \\ & y+2 & (y+2)(3y-1) & \\ \hline 1 & 3y-1 & 0 & \end{array}$$

（因数定理）　$f(x)$ は $x-(y+2)$ で割り切れる。　$\therefore f(x)=\{x-(y+2)\}\{x+(3y-1)\}$
$=(x-y-2)(x+3y-1)$ 〃

［解4］ $x^2+(2y-3)x-(y+2)(3y-1)=0$ を解くと，

（方程式の解の公式）　$x=\dfrac{-(2y-3)\pm\sqrt{(2y-3)^2+4(y+2)(3y-1)}}{2}=\dfrac{-2y+3\pm(4y+1)}{2}=\left\{\begin{array}{l}y+2\\-3y+1\end{array}\right.$

よって，　与式 $=\{x-(y+2)\}\{x-(-3y+1)\}$
$=(x-y-2)(x+3y-1)$ 〃

［2］ $\boxed{\text{例}\ \ a^3-(b^2+bc+c^2)a+bc(b+c)\ \text{を因数分解せよ。}}$

［解1］ 最低次の文字 b について整理すると，

与式 $=(c-a)b^2+(c^2-ca)b+a^3-ac^2$
$=(c-a)b^2+c(c-a)b-a(c+a)(c-a)$
$=(c-a)(b^2+bc-ac-a^2)$

最低次の文字 c について整理すると，

与式 $=(c-a)\{(b-a)c+b^2-a^2\}$
$=(c-a)\{(b-a)c+(b-a)(b+a)\}$
$=(c-a)(b-a)(a+b+c)$
$=-(a-b)(c-a)(a+b+c)$ 〃

$$\begin{array}{r} 1\quad (b+c) \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\ 1\ \ -(b+c)\ \ bc\ \big)\ \overline{1\quad 0 \quad -(b^2+bc+c^2)\quad bc(b+c)} \\ \underline{1\ -(b+c) \qquad bc \qquad\qquad} \\ (b+c)\quad -(b+c)^2 \quad bc(b+c) \\ \underline{(b+c)\quad -(b+c)^2 \quad bc(b+c)} \\ 0 \end{array}$$

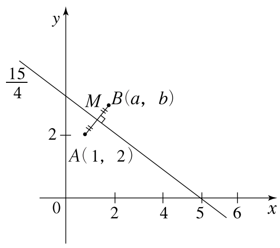
［解2］ $f(a)=a^3-(b^2+bc+c^2)a+bc(b+c)$ とおくと，$f(b)=f(c)=0$

（因数定理）$F(a)$ は $a-b$，$a-c$ を因数にもつ。
$F(a)$ を $a^2-(b+c)a+bc$ で割って，
商　$a+b+c$ を得る。

よって，$F(a)=(a-b)(a-c)(a+b+c)$
$=-(a-b)(c-a)(a+b+c)$ 〃

ii 例　直線 $3x+4y-15=0$ …①に関し，点A（1，2）と対称な点Bの座標（a，b）を求めよ。

［解１］　直線①⊥直線ABである。その傾きについて　①の傾きは $-\dfrac{3}{4}$であるから



$\dfrac{b-2}{a-1}\times\left(-\dfrac{3}{4}\right)=-1$　ただし，$a\neq1$　　$\therefore 4a-3b+2=0$　…②

線分ABの中点 $M\left(\dfrac{a+1}{2},\ \dfrac{b+2}{2}\right)$が①上にあるから

$3\cdot\dfrac{a+1}{2}+4\cdot\dfrac{b+2}{2}-15=0$　　$\therefore 3a+4b-19=0$　…③

②，③を解いて，$a=\dfrac{49}{25}$，$b=\dfrac{82}{25}$　よって，$B\left(\dfrac{49}{25},\ \dfrac{82}{25}\right)$ 〃

［解２］　①より $y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{15}{4}$ その傾きは $-\dfrac{3}{4}$，直線ABの傾きをmとすると，①に垂直であるから

$-\dfrac{3}{4}m=-1$　　$\therefore m=\dfrac{4}{3}$　　　A（1，2）を通り①に垂直な直線は

$y-2=\dfrac{4}{3}(x-1)$　　$\therefore\ y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{2}{3}$　…②

①，②を解いて，$x=\dfrac{37}{25}$，$y=\dfrac{66}{25}$　　よって，交点$M\left(\dfrac{37}{25},\ \dfrac{66}{25}\right)$

Mは線分ABの中点であるから　$\dfrac{a+1}{2}=\dfrac{37}{25}$，$\dfrac{b+2}{2}=\dfrac{66}{25}$　$\therefore\ a=\dfrac{49}{25}$，$b=\dfrac{82}{25}$　$\therefore B\left(\dfrac{49}{25},\ \dfrac{82}{25}\right)$ 〃

iii 例　nが自然数であるとき，不等式 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\geqq\dfrac{2n}{n+1}$ …Ⓐが成り立つことを証明せよ。

［証１］（１）$n=1$ のとき，Ⓐの左辺=1，右辺$=\dfrac{2\cdot1}{1+1}=1$ であるから　$n=1$ のときⒶは成り立つ。

（２）$n=k$ のとき，Ⓐが成り立つと仮定すると，$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{k}\geqq\dfrac{2k}{k+1}$　…Ⓑ

$n=k+1$ のときについて　$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{2(k+1)}{k+2}\geqq\dfrac{2k}{k+1}+\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{2(k+2)}{k+2}$

$=\dfrac{2k+1}{k+1}-\dfrac{2(k+1)}{k+2}$

$\dfrac{2k+1}{k+1}-\dfrac{2(k+1)}{k+2}=\dfrac{(2k+1)(k+2)-2(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\dfrac{k}{(k+1)(k+2)}>0$ （$\because\ k\geqq1$）

よって，$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k+1}\geqq\dfrac{2(k+1)}{(k+1)+1}$

すなわち，Ⓐは $n=k+1$ のときにも成り立つ。
ゆえに，Ⓐはすべての自然数nについて成り立つ。（終）

［証２］（１）$n=1$ のとき，略（２）$n=k$のとき，Ⓐが成り立つと仮定すると，　$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{k}\geqq\dfrac{2k}{k+1}$　…Ⓑ

$n=k+1$ のときを考える。

Ⓑの両辺に $\dfrac{1}{k+1}$ を加えると，$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k+1}\geqq\dfrac{2k}{k+1}+\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{2k+1}{k+1}$　…①

$\dfrac{2k+1}{k+1}-\dfrac{2(k+1)}{k+2}=\dfrac{(2k+1)(k+2)-2(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\dfrac{k}{(k+1)(k+2)}>0$ （$\because\ k\geqq1$）

よって，$\dfrac{2k+1}{k+1}>\dfrac{2(k+1)}{k+2}$ …②

①，②より　$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k+1}\geqq\dfrac{2(k+1)}{(k+1)+1}$

すなわち，Ⓐは$n=k+1$ のときにも成り立つ。
ゆえに，Ⓐはすべての自然数nについて成り立つ。（終）

iv 例　次の漸化式で表される数列の一般項を求めよ。
$a_1=1$　　$a_{k+1}=2a_k+1$　（k=1，2，3，…）

［解１］　漸化式より　$a_2=2a_1+1=2+1$
$a_3=2a_2+1=2(2+1)+1=2^2+2+1$
$a_4=2a_3+1=2(2^2+2+1)+1=2^3+2^2+2+1$

これから　$a_n=2^{n-1}+\cdots+2^2+2+1=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}$

一般項　は初項１，公比２の等比数列の和であるから　　$a_n=\dfrac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$ 〃

［解２］　$a_{k+1}=a_k=\alpha$ とおくと，漸化式より $\alpha=2\alpha+1$　　$\therefore\ \alpha=-1$

$a_{k+1}=2a_k+1$　の両辺から-1を引いて，$a_{k+1}+1=2(a_k+1)$　　$\therefore\ a_{n+1}+1=2(a_n+1)$

$\{a_n+1\}$　は初項 $a_1+1=1+1=2$，公比２の等比数列であるから

$a_n+1=2\cdot 2^{n-1}=2^n$　　$\therefore\ a_n=2^n-1$ //

［解３］　$a_{k+1}=2a_k+1$　…①　　$k\geqq 2$ のとき　$a_k=2a_{k-1}+1$　…②

①−②より　$a_{k+1}-a_k=2(a_k-a_{k-1})$

$a_k-a_{k-1}=b_{k-1}$　…③とおくと，$b_k=2b_{k-1}$

$\{b_n\}$は初項　$b_1=a_2-a_1=2a_1+1-a_1=a_1+1=1+1=2$，公比２の等比数列

$b_k=2\cdot 2^{k-1}=2^k$，③より　$a_k-a_{k-1}=2^{k-1}$

階差数列の一般項a_nは　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=1+\dfrac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n-1$ //

これは $n=1$ のときにも適する。

④ i　例　ある整式を $2x^2-1$ で割ると，商がx，余りが $-6x+9$ である。この整式を求めよ。

［解］　被除式＝徐式 × 商＋余であるから，求める整式をAとおくと

$A=(2x^2-1)\cdot x+(-6x+9)=2x^3-x-6x+9=2x^3-7x+9$ //

ii　例　$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3} & (x\neq 3 \text{ のとき})\\ 4 & (x=3 \text{ のとき})\end{cases}$ は $x=3$ において連続かどうかを調べよ。

連続 ⇔ 極限値＝関数値

［解］　極限値　$\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\dfrac{(x+3)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=3+3=6$

関数値　$f(3)=4$

極限値 ≠ 関数値であるから $f(x)$ は $x=3$ において連続でない。 //

iii　例　方程式 $2^x-3x=0$ は，３と４の間に解をもつことを示せ。

中間値の定理 ⇔ ［１］閉区間連続　［２］２端点の関数値が異符号 ⇔ 方程式 $f(x)=0$ は開区間に解

［解］　$f(x)=2^x-3x$ とおくと

2^x，$3x$ は連続であるから，その差である$f(x)$も閉区間［３，４］で連続　…①

端点 $x=3$，４での関数値　$f(3)=2^3-3\cdot 3=-1<0$，$f(4)=2^4-3\cdot 4=4>0$　したがって，$f(3)$と$f(4)$は異符号　…②

よって，中間値の定理より方程式 $f(x)=0$ は開区間（３，４）の間に解をもつ

iv　例　関数 $f(x)$ が $\begin{cases}\text{閉区間 } [a,\ b] \text{ で連続}\\ \text{開区間 } (a,\ b) \text{ で微分可能で，常に } f'(x)=0 \text{ であれば，}\end{cases}$

$f(x)$は $(a,\ b)$ で定数関数であることを証明せよ。

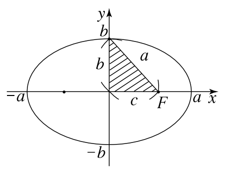
平均値の定理 ⇔ ［１］閉区間連続　［２］開区間微分可能 ⇔ ２点を通る線分と平行な接線をもつ接点が開区間にある

［証］　$(a,\ b)$ 内の２点 x_1，$x_2\,(x_1<x_2)$ に対して，平均値の定理：２点を通る線分の傾き=接線の傾き

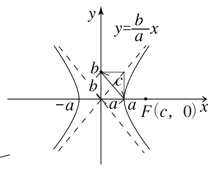
$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$　$(x_1<c<x_2)$　　仮定より $f'(c)=0$　　$\therefore\ f(x_2)-f(x_1)=0$　　$\therefore\ f(x_2)=f(x_1)$

よって，$f(x)$は $(a,\ b)$ で定数である。（終）

⑤ i　楕円の標準形　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　$(a>b>0)$



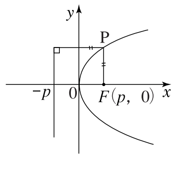
焦点$F(c,\ 0)$ とすると　$b^2+c^2=a^2$　　$\therefore\ c=\sqrt{a^2-b^2}$ //



ii　双曲線の標準形　$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$　$(a>0,\ b>0)$

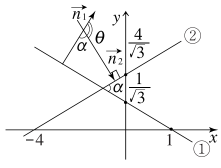
焦点を$F(c,\ 0)$ とすると　$a^2+b^2=c^2$　　$\therefore\ c=\sqrt{a^2+b^2}$ //

iii　放物線の標準形　$y^2=4px$　$(p\neq 0)$



焦点を$F(p,\ 0)$ とすると　準線 $x=-p$ //

⑥ i　例　次の２直線のなす鋭角αを求めよ。



$x+\sqrt{3}y-1=0$　…①　　$x-\sqrt{3}y+4=0$　…②

［解］　２直線の法線ベクトルはそれぞれ　$\vec{n_1}=(1,\ \sqrt{3})$，$\vec{n_2}=(1,\ -\sqrt{3})$

そのなす角を$\theta\,(0\leqq\theta\leqq\pi)$とすると，$\cos\theta=\dfrac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}=\dfrac{1-3}{\sqrt{1+3}\sqrt{1+3}}=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \theta=\dfrac{2}{3}\pi$　　よって，$\alpha=\pi-\theta=\dfrac{\pi}{3}$ //

ii ［１］　$\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=1+1=2$　　有限確定値　収束する。

［２］＜１＞　$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$　正の無限大　発散する

＜２＞　$\lim_{x\to 0}\frac{-1}{x^2}=-\infty$　負の無限大　発散する

＜３＞　$\lim_{x\to\infty}\sin x$　$-1\leqq \sin x\leqq 1$　振動する（極限はない）発散する

⑦ 例　不等式 $|x-2|<3$ を解け。

［解１］　（１）$x-2\geqq 0$ すなわち $x\geqq 2$ …①のとき，$|x-2|=x-2$　$\therefore x-2<3$　$\therefore x<5$　…②　①，②より $2\leqq x<5$

（２）$x-2<0$ すなわち $x<2$ …③のとき，$|x-2|=-(x-2)$　$\therefore -x+2<3$　$\therefore x>-1$　…④

③，④より $-1<x<2$

（１），（２）より求める解は　$-1<x<5$〃

［解２］　$|a|<c \Leftrightarrow -c<a<c$，$|a|>c \Leftrightarrow a<-c$ または，$c<a$，これを利用

$|x-2|<3$ より　$-3<x-2<3$，この各辺に２を加えて，$-1<x<5$〃

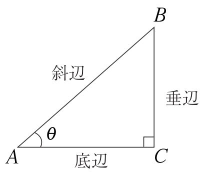
⑧覚え方

ｉ　三角比

$\sin\theta=\frac{垂}{斜}=\frac{BC}{AB}$

$\cos\theta=\frac{底}{斜}=\frac{AC}{AB}$

$\tan\theta=\frac{垂}{底}=\frac{BC}{AC}$



『水車（垂斜）は停車（底斜）して水底（垂底）に沈む』

ii　三角関数定理・公式

Ⅰ加法定理

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$　咲いた咲いたコスモス咲いた

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$　咲かない咲かないコスモス咲かない

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$　困った困った公式知らない

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$　困らない困らない公式知った

$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$　１引くタンタン分のタン足すタン

$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$　１足すタンタン分のタン引くタン

Ⅱ２倍角の公式

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$　咲いた咲いたは庭に咲いたコスモス

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$　困った困ったは２乗の公式知らない

$=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$　$(\because \cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1)$

$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$　１引くタンタン分の２タン

Ⅲ半角の公式

$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$　$\left(\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right.$　コスの半角の平方は富士の上のひとひらの雲

$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$　$\left.=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\right)$　サインの半角の平方は藤の上の糸を引く蜘蛛（くも）

Ⅳ積→和（差）の公式　（$\frac{1}{2}$がついたら和と差）

$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$　信号はレッドサイン，ブルーサインハーフ

$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$　工事は半ば進行―進行

$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$　高校卒業は半分親孝行

$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$　深々と夜半恐い―恐い

Ⅴ和（差）→積の公式　（２がついたら和の半分，差の半分）

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$　レッドサインとブルーサインは２信号

$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$　進行―進行は庭の工事

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$　親孝行は２年で高校卒業

$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$　　恐い―恐いは前の庭が深々

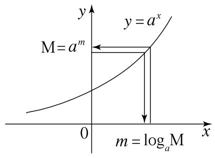
Ⅵ 3倍角の公式（係数4のところに3乗の項あり）

$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$　　サインは寂（さみ）しい（3 3 4）

$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$　　コイのさしみ（3 4 3）

iii

$m=\log_a M$	「aをm乗するとMとなる」と読む（$a^m=$M） $a>0$，$a\neq1$（底），M>0（真数）



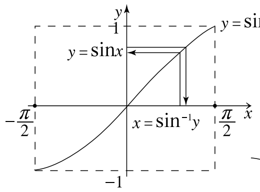
（1）$6^3=216$ を $m=\log_a$ M の形に書け。　　（解）$3=\log_6 216$ //

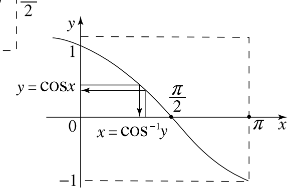
（2）$2=\log_{10}100$ を $a^m=$ M の形に書け。　　（解）$10^2=100$ //

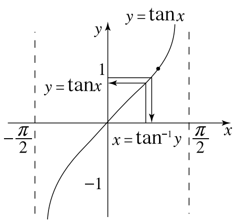
（3）$\log_5 125$ の値を求めよ。　　（解）$m=\log_5 125$ とおくと $5^m=125=5^3$　∴ $m=3$ //

iv

$\sin^{-1}y=x$	「sin$x$するとyとなる」と読む xの主値　$-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$
$\cos^{-1}y=x$	「cos$x$するとyとなる」と読む xの主値　$0\leqq x\leqq\pi$
$\tan^{-1}y=x$	「tan$x$するとyとなる」と読む xの主値　$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$







（1）$\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$ を $\sin^{-1}y=x$ の形に書け。　　（解）$\sin^{-1}\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{6}$ //

（2）$\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt2}=\dfrac{\pi}{4}$ を $\sin x=y$ の形に書け。　　（解）$\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt2}$ //

（3）$\tan^{-1}\sqrt3$ の値を求めよ。　　（解）$\tan^{-1}\sqrt3=x\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと $\tan x=\sqrt3$　∴ $x=\dfrac{\pi}{3}$ //

⑨ $\boxed{\text{部分積分法}\ \int fg'dx=fg-\int f'gdx=fg-\{f'\cdot\int gdx-\int(f''\cdot\int gdx)dx\}}$

i $\boxed{\text{例　不定積分}\int x\sin xdx\text{を求めよ。}}$

f ↘ g'	$f=x$ ↘ $g'=\sin x$	向きと符号 →　＋
f' ← g	$f'=1$ ← $g=-\cos x$	←　－（このとき積分する）

［解］　与式 $=x(-\cos x)-\int1\cdot(-\cos x)dx$
$=-x\cos x+\int\cos xdx$
$=-x\cos x+\sin x+C$ //（C 積分定数）

（与式 $=\int x(-\cos x)'dx=x(-\cos x)-\int(x)'(-\cos x)dx=-x\cos x+\int\cos xdx=-x\cos x+\sin x+C$）

ii $\boxed{\text{例　不定積分}\int x^2\cos xdx\text{を求めよ。}}$

$f=x^2$ ↘	$g'=\cos x$	向きと符号
$f'=2x$ ↘	$g=\sin x$	→　＋
$f''=2$ ←	$\int gdx=-\cos x$	←　－（このとき積分する）

［解］　与式 $=x^2\sin x-(-2x\cos x+2\int\cos xdx)$
$=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$ //

⑩ $\boxed{\text{ベクトル}\quad a\to\vec{a}}$

⑪ $\boxed{\text{例　Ⅰ～Ⅺ}}$

Ⅰ因数分解　低次数の文字で整理すると，因数分解が容易になる。

（1）$\boxed{a^2-bc+ca-b^2\ \text{を因数分解せよ。}}$

①項の組み合わせ $a^2-b^2-bc+ca=(a+b)(a-b)+c(a-b)$
$=(a-b)(a+b+c)$ //

②低次数の文字 c で整理　$c(a-b)+(a^2-b^2)=c(a-b)+(a+b)(a-b)$
$=(a-b)(a+b+c)$ //　←易しい

（2）$\boxed{2x^2-6xy+x+3y-1\ \text{を因数分解せよ。}}$

たすき掛け

x^2	定数項		
1	$-(3y-1)$	→	$-2(3y-1)$
2	-1	→	-1
			$-6y+1$

① x で整理 $2x^2-(6y-1)x+3y-1=\{x-(3y-1)\}(2x-1)$
$=(x-3y+1)(2x-1)$ //

②低次数の文字 y で整理　$-3(2x-1)y+(2x^2+x-1)=-3(2x-1)y+(x+1)(2x-1)$
$=(2x-1)(x-3y+1)$ //　←易しい

Ⅱ式の値

（1）対称式は基本対称式 $x+y$，xy を用いて表される。

（2）方程式の解と係数の関係が成り立つ。

これらを用いると式の値を求めるための計算が簡単になる。

（1） $x=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$，$y=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ のとき，次の式の値を求めよ。　① x^2+y^2　② x^3+y^3

$$x+y=\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2+(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\frac{16}{2}=8 \qquad xy=1$$

① $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=64-2=62$ 〃　　② $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=512-24=488$ 〃

（2） $2x^2-3x+5=0$ の解をα，βとするとき，次の式の値を求めよ。　$\alpha^3+\beta^3$

解と係数の関係により　$\alpha+\beta=\dfrac{3}{2}$，$\alpha\beta=\dfrac{5}{2}$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=\left(\frac{3}{2}\right)^3-3\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{27}{8}-\frac{45}{4}=\frac{27-90}{8}=-\frac{63}{8}$$ 〃

Ⅲ集合と命題

（1）　個数　ド・モルガンの法則を用いる。

1から100までの整数のうち，2でも3でも割り切れないものの個数を求めよ。

A：2の倍数全体，B：3の倍数全体とすると求めるものの全体は $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$　（∵ド・モルガンの法則）
したがって，求める要素の個数は，1から100までの整数全体から2または3で割り切れる数を取り除いた要素の個数に等しい。
∪={1, 2, 3, …, 100}，A={2, 4, 6, …, 100}，B={3, 6, 9, …, 99}，A∩B={6, 12, 18, …, 96}
$n(\cup)=100$，$n(A)=100\div2=50$，$n(B)=99\div3=33$，$n(A\cap B)=96\div6=16$
2の倍数または3の倍数＝A∪B　　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=50+33-16=67$
ゆえに，2でも3でも割り切れないものの個数は　$100-67=33$　よって，33個 〃

（2）　証明　対偶法を用いると証明が容易になる。

次の命題が真であることを証明せよ。　① $x+y>2\Rightarrow x>1$ または $y>1$

［証］　対偶をとって，$x\leqq1$ かつ $y\leqq1\Rightarrow x+y\leqq2$
これは明らかに真である。よって与えられた命題もまた真である。（終）
② $xy\neq6\Rightarrow x\neq2$ または $y\neq3$
③整数nの平方n^2が偶数⇒nは偶数である。　　②，③も①と同様にして証明できる。

Ⅳ2次方程式

（1）　因数分解できないときは，解の公式を用いる。

2次方程式　$2x^2-3x-1=0$　を解け。

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9+8}}{2\cdot2}=\frac{3\pm\sqrt{17}}{4}$$

（2）　たすき掛けが容易にできないときは，解の公式から解を求めることにより因数分解が容易になる。

$6x^2-19x-36$　を因数分解せよ。

$6x^2-19x-36=0$ とおくと　$x=\dfrac{19\pm\sqrt{361+864}}{12}=\dfrac{19\pm\sqrt{1225}}{12}=\dfrac{19\pm35}{12}$　　$\therefore x=\dfrac{9}{2}$，$-\dfrac{4}{3}$

よって，$6x^2-19x-36=6\left(x-\dfrac{9}{2}\right)\left(x+\dfrac{4}{3}\right)=(2x-9)(3x+4)$ 〃

Ⅴ高次方程式

（1）　因数分解には因数定理を用いる。

x^3-3x+2 を因数分解せよ。

$P(x)=x^3-3x+2$ とおくと　$P(1)=1-3+2=0$　ゆえに，$P(x)$ は $x-1$ で割り切れる。
組立除法を用いると

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ & 1 & 1 & -2 & \\ \hline 1 & 1 & -2 & 0 & \end{array}$$

$P(x)=(x-1)(x^2+x-2)$
$=(x-1)^2(x+2)$ 〃

$x^3+x+2=0$ を解け。

$P(x)=x^3+x+2$ とおくと　$P(-1)=0$ であるから $P(x)$ は $x+1$ で割り切れる。
組立除法を用いると

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ & -1 & 1 & -2 & \\ \hline 1 & -1 & 2 & 0 & \end{array}$$

$P(x)=(x+1)(x^2-x+2)$
$\therefore (x+1)(x^2-x+2)=0$　であるから

$x+1=0$，$x^2-x+2=0$　　$\therefore x=-1$，$\dfrac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$ 〃

Ⅵ2次関数　頂点や軸が与えられたときは，$y=a(x-P)^2+q$ を用いる。3点が与えられたときは，$y=ax^2+bx+c$ を用いる。

3点（0, 8），(−1, 0)，(2, 12）を通るようなグラフとなるような2次関数を求めよ。

求める2次関数を $y=ax^2+bx+c$ とすると，グラフが3点（0, 8），(−1, 0)，(2, 12）を通ることから

$8=c$，$0=a-b+c$，$12=4a+2b+c$　これを解くと，　$a=-2$，$b=6$，$c=8$
したがって，求める２次関数は　$y=-2x^2+6x+8$ 〃

VII円　中心と半径が与えられたときは，$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ を用いる。３点が与えられたときは，$x^2+y^2+lx+my+n=0$ を用いる。

（１）　$\boxed{\text{３点 } O(0,0),\ A(2,2),\ B(3,1) \text{ を通るようなグラフとなるような２次関数を求めよ。}}$

求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とおく。円は３点 $O(0,0)$，$A(2,2)$，$B(3,1)$ を通ることから
$n=0$　…②，$2l+2m+n+8=0$　…③，$3l+m+n+10=0$　…④
②を③，④に代入して，整理すると，　$l+m=-4$，$3l+m=-10$　これを解くと，　$l=-3$，$m=-1$
したがって，求める円の方程式は　$x^2+y^2-3x-y=0$ 〃

（２）　２つの円の交点を通る円の方程式を求めるには，２つの円の２つの交点を求めることをしないで求められる。

$\boxed{\text{２つの円 } x^2+y^2=25,\ x^2+y^2-2x-y-15=0 \text{ の２つの交点と原点を通る円の方程式を求めよ。}}$

求める円を $x^2+y^2-25+k(x^2+y^2-2x-y-15)=0$　…①　とすると，①が原点を通るから

$-25+k(-15)=0$　　$\therefore k=-\dfrac{5}{3}$　　よって，$x^2+y^2-25-\dfrac{5}{3}(x^2+y^2-2x-y-15)=0$

すなわち，　$2x^2+2y^2-10x-5y=0$ 〃

VIII三角形の形状

$\boxed{\text{次の関係式が成り立つとき，△ABCはどのような形の三角形か　} \sin A\cos A=\sin B\cos B}$

・一般に角を辺の関係に変形する。　$\sin A=\dfrac{a}{2\mathrm{R}}$，　$\sin B=\dfrac{b}{2\mathrm{R}}$，　$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$　，　$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$
を代入して整理すると，　$(a^2-b^2)(c^2-a^2-b^2)=0$　　$\therefore a=b$，$c^2=a^2+b^2$
したがって，$a=b$の二等辺三角形，または $C=90^\circ$ の直角三角形 〃

・三角関数の２倍角公式を用いて，角のままの等式を変形する。　$\sin A\cos A=\dfrac{1}{2}\sin 2A$

$\sin B\cos B=\dfrac{1}{2}\sin 2B$ を代入して整理すると，$\sin 2A=\sin 2B$　$0<A<\pi$　より，　$0<2A<2\pi$

であるから　$2A=2B$　または　$2B=\pi-2A$　　$\therefore A=B$　または　$B=\dfrac{\pi}{2}-A$

したがって，$A=B$ の二等辺三角形，または $C=\dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形 〃

IX連立方程式，逆行列　逆行列が存在しないときや変数の個数が多いときに掃き出し法を用いる。

（１）　次の連立方程式を解け。

［１］$\begin{cases} x+2y+6z=1 \\ 2x+3y+5z=3 \\ 4x+5y+3z=7 \end{cases}$　　［２］$\begin{cases} x+2y+6z=1 \\ 2x+3y+5z=3 \\ 4x+5y+3z=9 \end{cases}$

$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$　$\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$　$\vec{p_1}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$　$\vec{p_2}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$　とすると

［１］［２］はそれぞれ　$\mathrm{A}\vec{x}=\vec{p_1}$，$\mathrm{A}\vec{x}=\vec{p_2}$　とかける。

$|\mathrm{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & -3 & -21 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & -7 \\ -3 & -21 \end{vmatrix}=0$

であるから，逆行列は存在しない。したがってクラメルの公式は使えない。
掃き出し法を用いて解くと，

			［１］	［２］	
1	2	6	1	1	①
2	3	5	3	3	②
4	5	3	7	9	③
1	2	6	1	1	
0	−1	−7	1	1	②−①×2
0	−3	−21	3	5	③−①×4
1	2	6	1	1	
0	1	7	−1	−1	②×(−1)
0	−3	−21	3	5	

			［１］	［２］	
1	0	−8	3	3	①−②×2
0	1	7	−1	−1	
0	0	0	0	2	③+②×3

もとの x，y，zをいて表示すると

［１］$\begin{cases} x\qquad -8z=3 \\ \qquad y+7z=-1 \\ 0x+0y+0z=0 \end{cases}$

$z=c_1$（c_1（$\neq 0$）の任意の数）とおくと

$\begin{cases} x=8c_1+3 \\ y=-7c_1-1 \end{cases}$ 〃

［２］$\begin{cases} x\qquad -8z=3 \\ \qquad y+7z=-1 \\ 0x+0y+0z=2 \end{cases}$

これを満たす x，y，zは存在しないから解なし 〃

（２）　次の行列の逆行列を求めよ。

$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

A^{-1} の求め方　　① $|\mathrm{A}|$ の計算（$\neq 0$）　②余因子の計算　③余因子行列 $\tilde{\mathrm{A}}$　④ $\mathrm{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\mathrm{A}|}\tilde{\mathrm{A}}$ から求める
次数が高い正方行列の逆行列を求いるのに掃き出し法を用いる。

1	2	1	2	1	0	0	0	①
3	5	4	3	0	1	0	0	②
0	0	3	2	0	0	1	0	③
0	0	2	1	0	0	0	1	④
1	2	1	2	1	0	0	0	
0	−1	1	−3	−3	1	0	0	②−①×3
0	0	3	2	0	0	1	0	
0	0	2	1	0	0	0	1	
1	2	1	2	1	0	0	0	
0	1	−1	3	3	−1	0	0	②×(−1)
0	0	3	2	0	0	1	0	
0	0	2	1	0	0	0	1	
1	0	3	−4	−5	2	0	0	①−②×2
0	1	−1	3	3	−1	0	0	
0	0	3	2	0	0	1	0	
0	0	2	1	0	0	0	1	

1	0	3	−4	−5	2	0	0	
0	1	−1	3	3	−1	0	0	
0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	③⇔④÷$\frac{1}{2}$
0	0	3	2	0	0	1	0	
1	0	0	$-\frac{11}{2}$	−5	2	0	$-\frac{3}{2}$	①−③×3
0	1	0	$\frac{7}{2}$	3	−1	0	$\frac{1}{2}$	②+③
0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	
0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	1	$-\frac{3}{2}$	④−③×3
1	0	0	$-\frac{11}{2}$	−5	2	0	$-\frac{3}{2}$	
0	1	0	$\frac{7}{2}$	3	−1	0	$\frac{1}{2}$	
0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	
0	0	0	1	0	0	2	−3	④×2
1	0	0	0	−5	2	11	−18	①+④×$\frac{11}{2}$
0	1	0	0	3	−1	−7	11	②−④×$\frac{7}{2}$
0	0	1	0	0	0	−1	2	③−④×$\frac{1}{2}$
0	0	0	1	0	0	2	−3	

$$\therefore\ A^{-1}=\begin{pmatrix} -5 & 2 & 11 & -18 \\ 3 & -1 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad /\!\!/$$

X微分法

（1）積の導関数

① $\boxed{y=(x^3-2x^2+4x+3)(2x^3+3x^2-5x-6)\text{ を微分せよ。}}$

$y'=(x^3-2x^2+4x+3)'(2x^3+3x^2-5x-6)+(x^3-2x^2+4x+3)(2x^3+3x^2-5x-6)'$

$=(3x^2-4x+4)(2x^3+3x^2-5x-6)+(x^3-2x^2+4x+3)(6x^2+6x-5)$ ここまでで微分したことになる。

$=6x^5+x^4-19x^3+14x^2+4x-24+6x^5-6x^4+7x^3+52x^2-2x-15$

$=12x^5-5x^4-12x^3+66x^2+2x-39$ 〃

② $\boxed{y=(x^2-x+1)^3\text{ を微分せよ。}}$

$y=(x^2-x+1)(x^2-x+1)(x^2-x+1)$

$y'=3(x^2-x+1)_2(x^2-x+1)'$　　　$f(x)=f,\ g(x)=g,\ h(x)=h$ とおく　$(fgh)'=f'gh+fg'h+fgh'$

$=3(x^2-x+1)^2(2x-1)$ 〃　　　$(f^3)'=(fff)'=3f^2\cdot f'$　一般的に $\boxed{(f^n)'=nf^{n-1}\cdot f'}$

（2）商の導関数

$\boxed{y=\dfrac{2}{(x^2-1)^2}\text{ を微分せよ。}}$

$$y'=-\frac{2\{(x^2-1)^2\}'}{(x^2-1)^4}=-\frac{2\cdot 2(x^2-1)\cdot(x^2-1)'}{(x^2-1)^4}=-\frac{4\cdot 1\cdot 2x}{(x^2-1)^3}=-\frac{8x}{(x^2-1)^3}\ /\!\!/$$

（3）積や商の導関数を用いては微分できない。　→　合成関数の微分法を用いて微分する。

$\boxed{y=\sqrt[3]{x^2-1}\text{ を微分せよ。}}$

$y=(x^2-1)^{\frac{1}{3}}$，$t=x^2-1$ …①とおくと，$y=t^{\frac{1}{3}}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=(t^{\frac{1}{3}})'(x^2-1)'=\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}\ /\!\!/\quad(\because ①)$$

（4）対数微分法　$y=x^x\ (x>0)$ の類以外に取り上げるもの

$\boxed{y=\dfrac{(x+2)^2(x+3)^3}{x^2+1}\text{ を微分せよ。}}$

$\log|y|=2\log|x+2|+3\log|x+3|-\log|x^2+1|$

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x+3}-\frac{2x}{x^2+1}$$

$$\therefore y'=y\left(\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x+3}-\frac{2x}{x^2+1}\right)=\frac{(x+2)^2(x+3)^3}{x^2+1}\cdot\frac{3x^3+2x^2-7x+12}{(x+2)(x+3)(x^2+1)}=\frac{(x+2)(x+3)^2(3x^3+2x^2-7x+12)}{(x^2+1)^2}$$ 〃

ⅩⅠ積分法

（１）部分積分法　$\int x\sin x dx$ の類以外に取り上げるもの

$\boxed{\int_{-1}^{1}(x-1)(x+1)^3dx \text{ の値を求めよ。}}$

与式 $=\int_{-1}^{1}(x-1)\left\{\frac{1}{4}(x+1)^4\right\}'dx=\left[(x-1)\cdot\frac{1}{4}(x+1)^4\right]_{-1}^{1}-\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(x+1)^4dx=0-\frac{1}{20}\left[(x+1)^5\right]_{-1}^{1}=-\frac{32}{20}=-\frac{8}{5}$ 〃

（２）被積分関数の変更　第１例

$y^2-y=x$…①　　$2x+y=1$…②　　曲線①と直線②によって囲まれた部分の面積Sを求めよ。

①をyに解くと積分が難となるから

区間 $c\leqq y\leqq d$ で曲線 $x=h(y)$ と $x=k(y)$ で囲まれた部分の面積Sは $S=\int_c^d|h(y)-k(y)|dy$　$(c<d)$

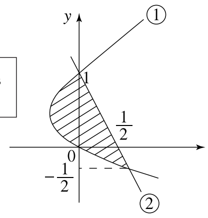
［解］　これを用いると①，②の交点は①を②へ代入　$2y^2-y-1=0$

$(y-1)(2y+1)=0$　　$\therefore y=1,\ -\frac{1}{2}$

$\boxed{\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3}$

②から $x=\frac{1-y}{2}$

$S=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\left\{\frac{1-y}{2}-(y^2-y)\right\}dy=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\left(-y^2+\frac{y}{2}+\frac{1}{2}\right)dy=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{2}\right)^3=\frac{9}{16}$ 〃



（３）被積分関数の変更　第２例

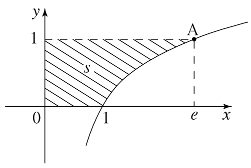
曲線 $y=\log x$と x軸，y軸および直線 $y=1$で囲まれる部分の面積Sを求めよ。

$y=\log x$ …①と $y=1$…②の交点をAとすると　$A(e,1)$

$y=\log x\ (1\leqq x\leqq e)\Rightarrow x=e^y\ (0\leqq y\leqq 1)$

Sは，$x=e^y$ とy軸および $y=0$，$y=1$で囲まれた部分の面積である。

したがって，$S=\int_0^1e^ydy=[e^y]_0^1=e-1$ 〃



（４）積分順序の変更

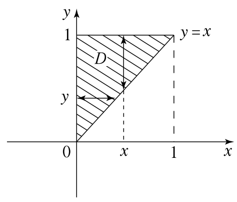
$\boxed{\text{累次積分}\quad V=\int_0^1\left(\int_x^1e^{y^2}dy\right)dx \text{ を求めよ。}}$

被積分関数 e^{y^2}はyで積分できない。Vはこのままでは求められない。

yを定数と見て e^{y^2}はxで積分できる。積分順序を変更して

領域D，$D=\{(x,y)\mid 0\leqq x\leqq 1,\ x\leqq y\leqq 1\}\Rightarrow D=\{(x,y)\mid 0\leqq x\leqq y,\ 0\leqq y\leqq 1\}$

$\therefore V=\int_0^1\left(\int_0^ye^{y^2}dx\right)dy=\int_0^1e^{y^2}[x]_0^ydy=\int_0^1ye^{y^2}dy=\frac{1}{2}[e^{y^2}]_0^1=\frac{1}{2}(e-1)$ 〃



⑫　式の計算における展開は答が３次式以上に重点をおく。

因数分解は２次３項式，x，y の２元２次式から３次式，文字式に重点をおく。

・$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$（複号同順）

$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$（複号同順）

・$3x^2+11x+6=(x+3)(3x+2)$

・$6x^2-xy-2y^2=(2x+y)(3x-2y)$

・$x^2+2xy-3y^2-3y^2-3x-5y+2=x^2+(2y-3)x-(y+2)(3y-1)=\{x-(y+2)\}\{x+(3y-1)\}=(x-y-2)(x+3y-1)$

・$a^3+8b^3=a^3+(2b)^3=(a+2b)\{a^2-a(2b)+(2b)^2\}=(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)$

・$a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)=-(b-c)a^2+(b+c)(b-c)a-bc(b-c)=-(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=(a-b)(b-c)(c-a)$

⑬ⅰ　数列の漸化式

隣接２項間

例　$a_1=1$，$k\geqq 2$　のとき $a_k=3a_{k-1}+2$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_nをnの式で表せ。

［解］　$k\geqq 2$ のとき，　$a_k=3a_{k-1}+2$　…①

kを$k+1$ とおくと，　$a_{k+1}=3a_k+2$　…②

②－①より　$a_{k+1}-a_k=3(a_k-a_{k-1})$

$\{a_n\}$の階差数列を$\{b_n\}$とすると，$b_k=3b_{k-1}$

また，$b_1=a_2-a_1=5-1=4$

ゆえに，$\{b_n\}$は初項４，公比３の等比数列

したがって，$n\geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\frac{4(3^{n-1}-1)}{3-1}$

すなわち，　$a_n=2\cdot 3^{n-1}-1$ 〃

これは $n=1$ のときにも適する。

隣接３項間

> 例　$x_1=0,\quad x_2=1,\quad x_{n+2}=\dfrac{x_{n+1}+x_n}{2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$ で定義される数列$\{x_n\}$の一般項x_nをnの式で表せ。

［解］　$x_{n+2}-x_{n+1}=\dfrac{x_{n+1}+x_n}{2}-x_{n+1}=-\dfrac{1}{2}(x_{n+1}-x_n)$

$\{x_n\}$の階差数列を$\{y_n\}$とすると，$y_{n+1}=-\dfrac{1}{2}y_n$ また，$y_1=x_2-x_1=1$

ゆえに，$\{y_n\}$は初項１，公比$-\dfrac{1}{2}$の等比数列

したがって，$n\geqq 2$のとき，$x_n=x_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}y_k=0+\dfrac{1\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1+\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$〃 この式は$n=1$ときにも適する。

ii　多重積分

> 例　２重積分　$V=\displaystyle\int_0^4\int_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}}xydxdy$ の値を求めよ。

$$V=\int_0^4 x\left(\int_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}}ydy\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^4 x\left[y^2\right]_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2}\int_0^4 x\left(x-\frac{1}{4}x^2\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^4\left(x^2-\frac{1}{4}x^3\right)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{16}x^4\right]_0^4=\frac{1}{2}\left(\frac{64}{3}-16\right)=\frac{8}{3}〃$$

> 例　３重積分　$I=\displaystyle\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y}(x+y+z)\,dxdydz$ の値を求めよ。

$$I=\int_0^1\int_0^{1-x}\left(\int_0^{1-x-y}(x+y+z)\,dz\right)dxdy=\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{1-x}\left[(x+y+z)^2\right]_0^{1-x-y}dxdy=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\int_0^{1-x}\{1-(x+y)^2\}\,dy\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left[y-\frac{1}{3}(x+y)^3\right]_0^{1-x}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-x+\frac{x^3}{3}-\frac{1}{3}\right)dx=\frac{1}{6}\int_0^1(x^3-3x+2)\,dx=\frac{1}{6}\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_0^1=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+2\right)=\frac{1}{8}〃$$

⑭ i　導関数の簡便法　α：実数のとき

1　$(\{f(x)\}^{\alpha})'=\alpha\{f(x)\}^{\alpha-1}\cdot f'(x)$，　$(\sqrt{f(x)})'=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

2　$\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$ ，$\{f(ax+b)\}'=af'(ax+b)$

3　$(\{f(g(x))\}^{\alpha})'=\alpha\{f(g(x))\}^{\alpha-1}f'(g(x))g'(x)$

4　$(\log|f(x)|)'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

5　$\{e^{f(x)}\}'=e^{f(x)}f'(x)$ ，$\{a^{f(x)}\}'=a^{f(x)}f'(x)\log a$

ii　不定積分の簡便法　α：実数のとき

1　$\displaystyle\int f(x)\,dx=F(x)+c$，$(a\neq 0)$ のとき　$\displaystyle\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+c$

2　$\displaystyle\int\{f(x)\}^{\alpha}f'(x)\,dx=\frac{\{f(x)\}^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$　$(\alpha\neq -1)$

3　$\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|+c$

⑮ i ［１］　面積と定積分　$y=f(x)\,(\geqq 0)$ と２直線$x=a$，$x=b\,(a<b)$に挟まれる部分の面積を$S(b)$とする。

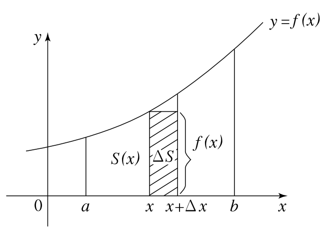
$\Delta S\fallingdotseq f(x)\Delta x$　$(\Delta S=S(x+\Delta x)-S(x))$

$\therefore\ \dfrac{\Delta S}{\Delta x}\fallingdotseq f(x)$

$\Delta x\to 0$のとき，$\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta x}=f(x)$

$\dfrac{dS}{dx}=f(x)$

aからbまでxで積分　$S=\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$



［２］　区分求積法　$f(x)$ は区間$[a,b]$で連続

$y=f(x)$とx軸，２直線$x=a$，$x=b\,(a<b)$で囲まれる部分の面積Sは　$S=\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

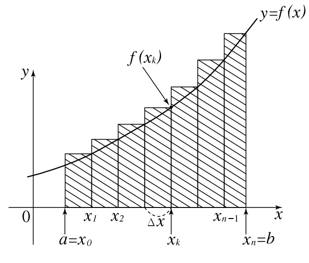
（１）区間$[a,b]$をn等分に細分して，その間隔をΔx，分点をx_kとする。　$\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$，$x_k=a+k\Delta x$

（２）よこΔxとたて$f(x_k)$の長方形のタンザクを作り，

区間$[a,b]$全体のタンザクの和を作る。　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$

（３）細分を十分細かくして，その極限をとる。　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x=S$

$\therefore\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x=\int_a^b f(x)\,dx$

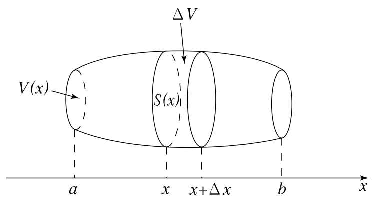


ii　体積と定積分

（1）断面積（点xにおける垂直な平面による立体の切り口の面積）が$S(x)$

2平面$x=a$，$x=b$ $(a<b)$ に挟まれる立体の部分の体積を$V(b)$とする。

$\Delta V \fallingdotseq S(x)\Delta x \qquad (\Delta V = V(x+\Delta x)-V(x))$



$\therefore \dfrac{\Delta V}{\Delta x} \fallingdotseq S(x)$

$\Delta x \to 0$のとき，　$\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta x}=S(x)$

$$\frac{dV}{dx}=S(x)$$

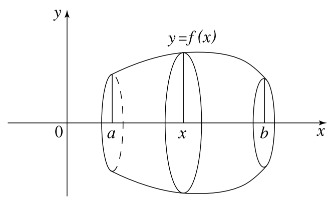
aからbまでxで積分　　$V=\int_a^b S(x)\,dx$

iii　曲線$y=f(x)$ $(a\leqq x\leqq b)$ をx軸の回りに回転してできる回転体の体積をVとする。

点xにおける断面は半径が$|y|=|f(x)|$の円，断面積$S(x)$は

$S(x)=\pi y^2=\pi\{f(x)\}^2$

$V=\pi\int_a^b y^2\,dx=\pi\int_a^b\{f(x)\}^2\,dx$



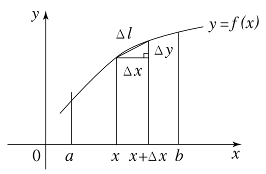
iv　長さと定積分　曲線 $y=f(x)$ $(a\leqq x\leqq b)$ の長さをlとする。　$\Delta l=l(x+\Delta x)-l(x)$

$\Delta l \fallingdotseq \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

$\dfrac{\Delta l}{\Delta x} \fallingdotseq \sqrt{1+\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$

$\Delta x\to 0$ のとき　$\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta l}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$

$$\frac{dl}{dx}=\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}$$



aからbまで積分　　$l=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$

v　表面積と定積分　曲線$y=f(x)(\geqq 0)$ $(a\leqq x\leqq b)$をx軸の回りに回転してできる回転面の面積をSとする。

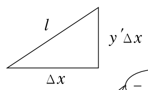
$l \fallingdotseq \sqrt{(\Delta x)^2+(y'\Delta x)^2}=\sqrt{1+(y')^2}\Delta x=\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\Delta x$

lをx軸の回りに回転してできる直円錐台の側面積をΔSとする。

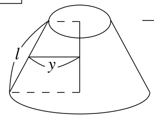
lの中点のx座標をxとすると，

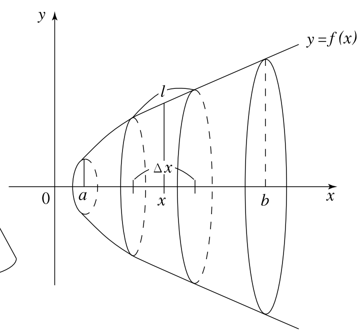
$\Delta S \fallingdotseq 2\pi y l = 2\pi f(x)\,l$

$=2\pi y\sqrt{1+(y')^2}\Delta x=2\pi f(x)\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\Delta x$



$\dfrac{\Delta S}{\Delta x} \fallingdotseq 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}=2\pi f(x)\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}$





$\Delta x\to 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta x}=2\pi y\sqrt{1+(y')^2}=2\pi f(x)\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}$

$$\frac{dS}{dx}=2\pi y\sqrt{1+(y')^2}=2\pi f(x)\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}$$

aからbまで積分　　$S=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$

⑯ i　面積

曲線$x=f(t)$，$y=g(t)$ とx軸，2直線$x=a$，$x=b$ で囲まれた図形の面積をSとする。

$(a=f(\alpha)$，$b=f(\beta)$，区間(α,β) で $f'(t)$ の符号は一定とする。)

直交座標では$y=f(x)$とx軸，2直線$x=a$，$x=b$ で囲まれた図形の面積Sは

$S=\int_a^b|y|\,dx$　…①

$dx=\dfrac{dx}{dt}dt$　…②　　②で$\dfrac{dx}{dt}<0$のときもあるから　$dx=\left|\dfrac{dx}{dt}\right|dt=|\dot{x}|\,dt$　…②′

$\begin{array}{c|c} x & a\to b \\ \hline t & \alpha\to\beta \end{array}$　…③

②′③を①に代入して　　$S=\int_\alpha^\beta|y\dot{x}|\,dt$

ii　長さ

曲線$x=f(t)$，$y=g(t)$ $(\alpha\leqq t\leqq\beta)$ の長さをlとする。

直交座標では$y=f(x)$ $(a\leqq x\leqq b)$ の長さlは

$l=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx$　…①

$y'=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$　　$\dot{x}>0$のとき，　$\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+\dfrac{(\dot{y})^2}{(\dot{x})^2}}==\dfrac{\sqrt{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2}}{\dot{x}}$　　…②

$dx=\dot{x}dt$　…③

$\begin{array}{c|c} x & a\to b \\ \hline t & \alpha\to\beta \end{array}$　…④

②～④を①に代入して　　$\ell=\int_\alpha^\beta\dfrac{\sqrt{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2}}{\dot{x}}\dot{x}dt=\int_\alpha^\beta\sqrt{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2}\,dt$　（$\dot{x}<0$のときも同様に成り立つ）

iii　回転体の体積・回転面の面積

曲線$x=f(t)$，$y=g(t)$ $(\alpha\leqq t\leqq\beta)$ をx軸の回りに回転してできる回転体の体積をV，表面積をSとする。

直交座標では，$y=f(x)$ $(a\leqq x\leqq b)$ をx軸の回りに回転してできる回転体の体積V，表面積Sは

$V=\pi\int_a^b y^2\,dx$　…①

$S=2\pi\int_a^b|y|\sqrt{1+(y')^2}\,dx$　…②

Vについて　$dx=\dot{x}\,dt$　$\dot{x}<0$ のときもあるから　$dx=|\dot{x}|\,dt$　…③

x	$a\to b$
t	$\alpha\to\beta$

…④

③，④を①に代入　$V=\pi\int_\alpha^\beta y^2|\dot{x}|\,dt$

Sについて　長さで導いたように　$\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\sqrt{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2}\,dt$　…⑤

④，⑤を②に代入　$S=2\pi\int_\alpha^\beta|y|\sqrt{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2}\,dt$

⑯極座標

i　面積

$r=f(\theta)\ (\alpha\leqq\theta\leqq\beta)$，２つの半直線 $\theta=\alpha$，$\theta=\beta$ で囲まれた図形の面積をSとする。

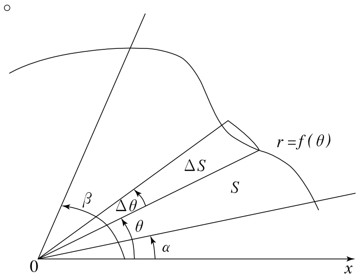
$\Delta S=S(\theta+\Delta\theta)-S(\theta)$

$\Delta S\fallingdotseq\frac{1}{2}r^2\Delta\theta$

$\frac{\Delta S}{\Delta\theta}\fallingdotseq\frac{1}{2}r^2$

$\Delta\theta\to0$のとき　$\lim_{\theta\to0}\frac{\Delta S}{\Delta\theta}=\frac{1}{2}r^2$

$\frac{dS}{d\theta}=\frac{1}{2}r^2$



αからβまでθで積分　$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\,d\theta=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\{f(\theta)\}^2\,d\theta$

ii　長さ

$r=f(\theta)\ (\alpha\leqq\theta\leqq\beta)$の長さを$l$とする。

媒介変数表示では，$x=f(\theta)$，$y=g(\theta)\ (\alpha\leqq\theta\leqq\beta)$の長さ$\ell$は

$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2}\,d\theta$　…①

極座標 $(r,\ \theta)$ と直交座標 $(x,\ y)$ との関係式は　$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$

$\dot{x}=r'\cos\theta-r\sin\theta$，$\dot{y}=r'\sin\theta+r\cos\theta$

$$\begin{aligned}\sqrt{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2}&=\sqrt{r'^2\cos^2\theta-2rr'\cos\theta\sin\theta+r^2\sin^2\theta+(r')^2\sin^2\theta+2rr'\cos\theta\sin\theta+r^2\cos^2\theta}\\&=\sqrt{r^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+(r')^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}\\&=\sqrt{r^2+(r')^2}\quad\cdots②\end{aligned}$$

②を①に代入して　$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\theta=\int_\alpha^\beta\sqrt{\{f(\theta)\}^2+\{f'(\theta)\}^2}\,d\theta$

⑰ i　$\boxed{\text{例　ベクトル }\vec{a}=(-3,\ 4)\text{ に垂直な単位ベクトルを求めよ。}}$

［解］求める単位ベクトルを $\vec{e}=(x,\ y)$ とすると

$|\vec{e}|=1$ より　$x^2+y^2=1$　…①

$\vec{a}\perp\vec{e}$ より　$\vec{a}\cdot\vec{e}=0$　$\therefore -3x+4y=0$　$\therefore y=\frac{3}{4}x$　…②

②を①に代入して整理すると，　$\frac{25}{16}x^2=1$　　$\therefore x=\pm\frac{4}{5}$，　②より　$y=\pm\frac{3}{5}$（複号同順）

単位ベクトルは　$\pm\left(\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right)$　〃

ii

$p\Rightarrow q$	逆	$q\Rightarrow p$
裏	対偶	裏
$\bar{p}\Rightarrow\bar{q}$	逆	$\bar{q}\Rightarrow\bar{p}$

（p，qの真理集合をそれぞれP，Qとすると，　$p\Rightarrow q$　は $P\subset Q$と同値）

iii［１］直接証明法　$\boxed{\text{例　}x+y+z=0\text{ のとき，等式 }x^2-yz=y^2-zx\text{ が成り立つことを示せ。}}$

［証１］　条件式 $x+y+z=0$ より　$z=-(x+y)$

よって，$(x^2-yz)-(y^2-zx)=x^2-yz-y^2+zx$

$=x^2+y(x+y)-y^2-(x+y)x$　　（$\because z=-(x+y)$）

$=x^2+xy+y^2-y^2-x^2-xy$

$=0$

$\therefore x^2-yz=y^2-zx$　（終）

［証２］　$x^2-yz-(y^2-zx)=z(x-y)+(x^2-y^2)$

$=z(x-y)+(x+y)(x-y)$

$=(x-y)(x+y+z)$

$=0$　　（$\because x+y+z=0$）

$\therefore x^2-yz=y^2-zx$　（終）

［２］間接証明法

・対偶法　$\boxed{\begin{array}{l}\text{例　整数}n\text{に関する次の命題が真であることを，対偶を用いて示せ。}\\\quad n^2\text{ が３の倍数ならば，}n\text{は３の倍数である。}\end{array}}$

［証］　nが３の倍数でないと仮定すると，kを整数として $3k+1$，$3k+2$ のいずれかに表すことができる。

$n=3k+1$ のとき，　$n^2=3(3k^2+2k)+1$

$n=3k+2$ のとき，　$n^2=3(3k^2+4k+1)+1$

よって，いずれも場合も３の倍数でない。

したがって，n^2 が３の倍数ならば，n は３の倍数である。（終）

・背理法　例　$\sqrt{3}$ は有理数でないことを証明せよ。

［証］　$\sqrt{3}=\dfrac{a}{b}$（a，b は互いに素）と仮定すると，

$\sqrt{3}\,b=a$　　$\therefore 3b^2=a^2$　…①

①の左辺は３の倍数　ゆえに，右辺も３の倍数，したがって，a は３の倍数　…②

$a=3c$　（c は整数）とおき，①に代入すると

$3b^2=9c^2$　　$\therefore b^2=3c^2$　…③

③の右辺は３の倍数　ゆえに，左辺も３の倍数，したがって，b は３の倍数　…④

②と④は，a，b は互いに素ということに反する。よって，$\sqrt{3}$ は有理数でない。（終）

・転換法　例　２次方程式　$ax^2+bx+c=0$ …①（a，b，c は実定数）　$D=b^2-4ac$

［１］D＞0⇒①は異なる２つの実数解をもつ。

［２］D＝0⇒①は重解をもつ。

［３］D＜0⇒①は異なる２つの虚数解をもつ。

このとき

逆の命題［１］′ ①が異なる２つの実数解をもつ。⇒D＞0

［２］′ ①が重解をもつ。⇒D＝0

［３］′ ①が異なる２つの虚数解をもつ。⇒D＜0

が成り立つことを示せ。

［証］　D＝0またはD＜0が成り立つと仮定すると，［１］，［３］より①は重解をもつか異なる２つの虚数解をもつ。よって，①が異なる２つの実数解をもつ。⇒D＞0

［１］′ と同様にして［２］′，［３］′ も背理法を用いて証明できる。（終）

転換法を用いると

［証］　仮定はD＞0，D＝0，D＜0, すべての場合をつくし，結論はどの２つも両立しない。

したがって，［１］，［２］，［３］の逆の命題［１］′，［２］′，［３］′ が成り立つ。（終）