高専数学を学生自身のものにするための指導法 そのI

金山　證*

An Approach to Teaching Mathematics to Technical College Students: How to Make It Easy for Them to Understand Part I

Satoru KANAYAMA

Abstract

The author points out three important aspects of the teacher's role in teaching mathematics to technical college students.

In order to help them absorb what they learn, the teacher need to: 1. clarify where, how and why they suffer setbacks in studying mathematics; 2. constantly review and improve teaching methods and materials considering the students' actual levels of achievement; and 3. support independent learning.

1　はじめに

最近の科学技術の発展には誠に目覚ましいものがある。その基礎であり，手段である数学の重要性はますます増大しつつある。また一方，いままでとは主として科学技術の方面にのみ応用を持っていると思われていた数学が最近になって実は人間のあらゆる社会活動を対象とする行動科学の方面にも非常に大きな応用をもっていることが明らかになってきた。このように，科学技術と行動科学の２つの方面からの社会的要求はますます増大する一方である。したがって，高専における数学教育の比重はますます大きくなりつつある。

ややもすれば，高専生向きの教科書には読者を突き放したような記述が多い。しかし，残念なことに高専の授業時間には大きな制限があるために授業が型通りになりがちで，従来通りに例題と類題中心の授業だけで学生が将来必要な数学をマスターということはますます困難になりつつあるのが現状である。

実際の授業ではその点を改め，数学の力がつく章末の問題まで解けるようにするには，補充例題とその解法を作成して学生に提示・指導することが大切である。学生自身が素直に理解でき，しかもそれによって厳密で豊富な知識が身に付き，理論に対する真の意味がわいてくるような指導を心掛けなければならない。

このような状態のもとで高専の授業を十分に理解し，それを活用する力を身につけるには，学生に心理も盲点も知り尽くしている経験豊かな教師の手になる懇切丁寧で適切な指導によるのが一番良い方法である。けれども，学生を指導される教師は必ずしもそのような教師ばかりとは限らない。そこで，経験が少なく，学生が陥りやすい分野や間違いやすい箇所にも目が行き届かない教師にも高専数学を学生自身のものにするための指導ができるようにとの願いをもって記述を試みたものである。

2　基礎数学を学生自身が習得することの重要性

問題を見てその問題の内容を理解すると，問題の難易や解法に対する直観が過去の知識の集積または既知の問題に対する類推から浮かぶことが多い。これがいわゆる実力である。実力が身についているとはいえないことは新しい問題に直面したときに，「習ったことがないので知らない，あるいは，わからない。」とか，「やったことがないのでできない。」等の学生のつぶやきが聞かれることからすぐわかる。

数学の実力を分析すると概念の理解，計算力，抽象化，論理的記述力に集約される。数学の実力をつけるべき第一歩である基礎数学を学生自身が習得することの重要性について，次の３つの点から具体的に述べる

*教養学科

（平成20年３月20日受付）

と，

(1)　基礎数学の概念及びその論理的記述を含む学習が不十分であると，微分積分，代数幾何の分野における応用・発展的内容を理解しにくいばかりか数学を使う今後の学習に支障をきたしてくる。

(2)　計算は式の変形である。確実に上手にできるか否か，これからあとの数学を効率的に学習することができるかどうかの分かれ目である。

(3)　数学の中でもとりわけ，代数の学習は概念・演算の抽象化，一般化が頻繁である。抽象化して捉えたり，論理的に思考したり，記述したりする力が必要とされる。基礎数学の学習が不十分で学生自身のものにすることができないならば，論理的記述力が身につかないばかりでなく抽象化された概念・演算が多用される高度な数学になればその学習が困難なものとなってくる。

3　学生の実態

「カリキュラムが改訂されると学力は下がる。」このことは現場の数学の教員の中では常識になりつつある。高校でも新しいカリキュラムが実施された5年前の平成15年度，「数学の学力が低い生徒が入学してくる。」とささやかれていた。実際，数学の学力低下が指摘されている。(学力数値の低下を見ると，PISA 2000年調査では557点で1位であったものが2003年調査（調査対象：高校1年生（約4700人)，OECD加盟国の平均点が500点，標準偏差が100点になるように換算されている）では534点で6位に落ち込むなど深刻視されている。

本校の学生をみると，定期テストのときにまとめて学習する。レベルが高くないと満足のいく結果を残す。実力があると錯覚する。努力を怠り，地道に数学的感覚を研かないために柔軟な思考力や受容性が貧弱なものとなっている。内容が質的に高くなると追いつけず，満足のできる結果も望めない。落ちこぼれて数学嫌いを生み出している。その原因は，(1)学習意欲の低下，(2)学習力の低下，の2点が挙げられる。この2つの観点から分析すると，

(1)　学習意欲の低下

学習意欲の低下は新しい傾向の問題に挑戦しようとする積極的な学習態度が身についていないこと，また，学年進行に伴って予習・復習の習慣がついていない学生が増加傾向にあることに端的に現れている。実際の授業においては，数学が得意な学生であっても自主的に各種の問題に挑戦する学生は限られた者となっている。「例題が理解できたら，小問を解いてみなさい。解いた学生は章末の問題・問題集に挑戦しなさい。」と教師のはたらきかけが必要なのである。このようなタイプの人間を指示待ち人間と呼んでいる。その数が増加傾向にあるのが気がかりである。

(2)　学習力の低下

計算が遅い，つまらないところに時間がかかる，学習の能率が上がらないなど計算力の低下が気になる。また，根拠の説明や論理の展開がうまくできないなど満足な答案が書けない学生も少なくない。したがって，高度で抽象的なものの理解を困難なものとしている。

また，指示されても指示通りできない学生が増えたことには驚かされる。成績中位者の学生の一部から下位者は自分の頭を使って，ノートに鉛筆を走らせて解こうとしないのである。指名された学生が解答を板書するのを待っているのである。このような学生は旧カリキュラム履修者にも少しは存在していたのであろうが，人数が増加して顕著になったというべきであろう。

4　学生がつまずく実態とその主な原因

つまずく主な原因には

(1)　学生の対応の拙さ

(2)　意識や取り組み方のズレや甘さ

の二つの側面が挙げられる。

(1)　学生の対応から拙い面を3つ挙げると，

①　個々の解き方を重視し過ぎる局所的な捉え方が中心である。個々の解法やその根底の考え方や公式どうしを関連づけない。また，包括的，統一的に見る大局的な捉え方ができない。

②　鉛筆を使わないで直観や閃きに頼って頭の中だけで考えて解答へ至る筋道を大事にした記述をしないで答のみの記述に執着する。

③　自分自身で作り上げた解答に対して正解を見ると直ちに間違った箇所を消して正解を書き込む。途中の計算式や論理的記述を含む自分の解答の添削をしない。

(2)　意識や取り組み方のズレや甘さの側面について時期を下記の ①から⑦の7段階に分けて見ると，

①　高専入学当初の学習段階

ⅰ　ほんの短い期間であるが中学校の数学と重複する部分が多く，新しい概念，記号，用語，定義，公式が時たましか顔を出さないので中

学校の実力そのままを持ち込んで授業に望む。

ii　入学まもなく緊張が持続しているときは授業に集中できている。深く突っ込んだ内容ではないので授業中に教科書を読めば理解できたり，問題解法においても先生に頼らずに自分の理解の仕方が通じる学習を積極的にしなくても，熱心にしている学生との差をほとんど感じない。学生はこれで大丈夫というような安定した状態に陥り，新しいものを何とか取り込む意欲を持とうとしない。

iii　高専の数学は大したことがないという先入観念を持つ。この認識がまもなく抽象性の高い高度なものとなる数学の対応を大きく狂わせる。最初に学習する「数と式，集合と論理」を身につけるのに大きな障害となる。今後の学習に大きな影響を及ぼすことに気づかない。

② 入学後の緊張が緩む頃

i　学習に消極的，授業を漫然と受ける。

ii　予習・復習をやらないことが習慣化する。

iii　板書する懇切丁寧な詳解をノートにとらない。

iv　要点を押さえた解説を真剣に聞かない態度や姿勢を取る。

v　授業に集中しない。

③ 前期中間試験前の学習

授業の進度も上がり高専本来のペースに入る頃には数学の内容も次第に高度になる。

i　行間の意味が把握しにくい。

ii　細かい計算の割愛や論理の記述に飛躍が多く，戸惑いを感じたり，スムーズに理解できにくくなったりする。

iii　学生がつまずいて高専数学に負担を強く感じる。

④ 前期中間試験の学習

学生は誤った先入観念や授業の態度の見直しによる意識と取り組み方の転換をしない。そのために

i　相変わらず実力過信による自己流の独り善がりな解法による解答の作成を繰り返す。

ii　発展性がなく多面的で重層的な見方や考え方が身につかないで行き詰まる。

iii　中学時代に築き上げた直観や閃き，計算力を使い果たす。

iv　解答を作成することすらおぼつかない。

v　数学の内容を理解することが困難になる。

vi　中学時代のようにまとめて理解することは到底できない。

vii　高専の数学についていけない。前期中間試験でその兆候が顕れる。

⑤ 夏期休暇中の学習

i　数学の弱点を補強しなければならないという意識が薄い。

ii　長期休暇中に時間を決めて自学自習ができない学生が多い。

iii　休みという気分がとれなくて，落ち着いて学習ができない

iv　数学の課題の取り組みをおろそかにする。

⑥ 前期期末試験の学習

i　学生は数学の結果にこだわる。成績を重視する点数至上主義に陥り易い。

ii　学習の習慣がなくテストのときにまとめて学習する。レベルが高くないと満足のいく結果を残す。好成績を残すと実力があると錯覚する。

iii　レベルが上がるとき，努力を怠る，数学的感覚を研かないために柔軟な思考力や受容性が貧弱になる。

iv　やるべき内容が膨大な上に質的にも高くてとても追いつけない。また，満足のできる結果が望めないで落ちこぼれる。中学では予想もしない数学嫌いに一転する。

⑦ 前期期末試験以降の学習

自己の取り組み方を見直し，ア 意識や取り組み方のズレや甘さの側面を改めて軌道修正できるタイプと，改められないで，イ 前期期末試験時における意識－数学の結果にこだわる－，学習段階の取り組み方－テストのときにまとめて学習する－を繰り返すタイプが考えられる。この方向性がこのまま上級生に継続されていく学生がほとんどである。

5　教師の側面から－教師の豊かな発想・観点とはたらきかけ

数学は積み上げの学問であるといわれる。質の高い高専数学の習得には既習の知識・技能，計算技術など数学の総合力が備わってはじめて可能となるのである。

高専数学を学生自身のものにするための指導の在り方として教師の側面から，

(1)　豊かな発想・観点で積極的にはたらきかけるという姿勢を保持する。

(2)　教師は学生が目指す方向性すなわち目標－数学の基礎概念の把握を確実にして計算力や論理的記述力の養成－を明確に持って授業に臨むこと。

が必要不可欠である。

(1)　豊かな発想・観点で積極的にはたらきかけるという姿勢を保持する，ことについて述べると，

「教科書を教える」ような発想・観点を改め，「教科書で教える」ような発想・観点で授業をする。学生が自ら考えることを通して解法の論理的な記述に納得させたり，解法のステップに着目して重要なポイントがどこにあるかを見出させたり，解法の工夫や新しい発見をさせたりできるように発問の工夫や答えの根拠を問いただすことを通して学生に強くはたらきかける。

(2)　学生が目指す方向性すなわち目標－数学のあらゆる分野の基礎「数と式，集合と論理」の概念の把握を確実にして計算力や論理的記述力の養成－を明確に持って授業に臨む，ことについて述べると，

抽象化・一般化が頻繁な代数の学習は入り易いが上達しにくい。代数の入口としての「数と式，集合と論理」での論理の筋を身につけるには，その基礎の概念の把握を確実にして計算力を十分に養成することが必要である。学生が大変な骨折り，相当の努力をする覚悟を固める必要あることを意識させる。

①　「数と式，集合と論理」の各項目とそれに続く関連項目を挙げてその重要性を認識させる。

i　因数分解：最小公倍数，分数式の計算，方程式・不等式の解法

ii　分数式：2次方程式の解の公式，等比数列の和の公式，微分・積分の公式

iii　集合：確率

②　系統的に学習効果をおさめる。

i　例題と練習問題の位置づけを明確にする。
例題：基礎となる性質や考え方を捉える。
練習問題：式の計算で数式計算，集合と論理で論理的記述に慣れる。

ii　例題の解法と必要な要項の解説の後に続けてその練習を次々と重ねる。

iii　扱う例題・練習の程度を順次に高めていく。

iv　確実に一歩一歩練習を積み重ねつつ，基礎を固める。
例題に続く問題の解決後，授業時，模範解答と比較して留意点に目を輝かせながら集中して取り組むことによって問題の処理の仕方が自然に体得できる。新しい問題に対し適切な解法の見通しを得ることができる。

③　単元の1節が終わる毎（短い節の場合は2節をまとめる）に小テストを実施して理解度をチェックしながら授業を進める。

④　教室では十分に練習する時間がない。基礎数学の反復練習によりこの方面を充実する。

i　プリント学習

ii　レポートの作成

・教科書の各章の節が終了した時点の節末の練習問題の解答

・長期休暇期間を利用した既習事項に該当する問題集の解答

6　学生の側面から－学生の主体的な取り組み－

高専数学を学生自身のものにするための指導の在り方として学生の側面から見ると，学生の対応・認識・意識・取り組み方の変更が重要となってくる。

積み上げの学問である数学においては「数と式，集合と論理」の定着化が大切である。最初の定期試験のおいて学生は満足のいく結果を残すが真の実力はついていない。その定期試験において結果が残せたことで実力がついているといった誤った先入観念を早く払拭し，学習体制を見直して意識と取り組み方の転換が必要であり，取り組み方を変えることが大切である。具体的に述べると，

(1)　授業に集中する。毎日集中するものとしないものとの差は大きい。

(2)　地道に練習問題を解く努力を怠らないような学習の習慣化を図る。また，同時に例題の解法を真似て解くことを繰り返しつつ，真似なくても解答できるような学習の仕方を身につける。

(3)　継続的な学習の積み重ねによって数学的感覚を研ぎすまし，発想を豊かにする。練習問題では模範解答が書けることによって真に実力を養成される。

7 教材の見直しと改良

数学のあらゆる分野の基礎概念の把握及び，計算力や論理的記述力の養成を目標として，1つの側面，教材の見直しと改良を通して考察する。

教科書では，いろいろな制約のために，教材に対する十分な配慮がなされているとはいい難い。

(1) 教科書の不備や解説不足－学生が難解に感じる箇所

① 数学的用語と定義

i 必要条件・十分条件：命題の真偽とその逆の真偽

ii 命題の真の根拠：真理集合の包含関係

iii 命題の偽の根拠：反例に挙げられるもの，真理集合の包含関係

iv 命題論理の根拠

「かつ」の否定：「または」の否定：「または」,「かつ」：真理集合の集合算

v 命題の真偽とその逆，裏，対偶の真偽の関係：真理集合の包含関係

② 例題と練習問題

概念の基礎や骨格となる部分を定着させるような例題，概念の特徴や中心となるものをきちんと形成させるような例題が大半である。また，例題のレベルを超えた問題，適当な例題もなく問題が与えられている場合もあって学生は解けない。このようなときは適当な例題や問題の数字を変えて例題として解法を付記して板書またはプリントする。

i 基本例題

ii 重要例題

iii 必然性のある例題の選定

iv 応用・発展性のある例題

例題の選定については，高専数学の領域別に選定して例題とその解法について，例題の指導細案（本論の末尾にその抜粋及び学習指導案を掲載）として富山商船高等専門学校研究集録の第23号から連続して第40号まで掲載して示した。

8 指導法の見直しと工夫

数学のあらゆる分野の基礎概念の把握及び，計算力や論理的記述力の養成を目標として，他の側面，指導法の見直しと工夫を通して考察する。

(1) 事前の準備で留意していること

① 妥当な例題の選定と配列

② 計算・証明問題の練習問題の種類と個数及び配列の決定

(2) 授業実践の板書事項で心掛けていること

① 授業では要点を押さえた解説に徹し，時間の許す限り教科書の行間の意味をひもといたり，細かい計算や論理の記述に飛躍がないよう十分注意を払う。

・実践例 ・ポイントとなる例題を取り上げる。

i 点の直線に関する対称点の座標（→問題と解答[1]）

ii 補充例題 因数分解（→問題と解答[2]）

・1文字について降べきの順に整理

・低次数の文字で降べきの順に整理

iii 証明問題 （→問題と解答[3]）

② 「被除式＝除式×商＋余り」のように言葉の式にまとめて提示する。

整式AをBで割ったら商がQ余りがRであった。整式Aを求めよ。

A ＝ B×Q＋R（→問題と解答[4]）

③ 数学に対する興味を持たせる。

必要条件・十分条件について

・具体例に日常的な事象を挙げて説明する

・覚え方を通して興味・関心を高める

・実践例 解説の工夫など数学に対する興味を持たせる。

i 女優ならば女性である：真（女優⇒女性）

女性ならば女優である：偽（女性⇏女優）

女性であるためには女優であれば十分である（女優であれば十分保証される）

女優であるためには女性であることが必要である（女性であることが必要で欠かせない）

女優は女性であるための十分条件である

女性は女優であるための必要条件である

ii 尾ならば頭である：真（尾⇒頭）

頭ならば尾である；偽（頭⇏尾）

⇒矢印の先：頭 矢印の元：尾 暗記：頭は必要，尾は十分

P → Q が 真のとき P⇒Q と書く（仮定⇒結論）

Q → P が 偽のとき Q⇏P と書く（仮定⇏結論）

Pは尾： 尾は十分

PはQであるための十分条件である

Qは頭：　頭は必要

QはPであるための必要条件である

P → Q　が真　（P⇒Q），

かつ　Q → P　も真　（Q⇒P）

すなわち　P⇔Q　（仮定⇔結論）

PはQであるための必要十分条件である

QはPであるための必要十分条件である

よって　PとQは同値である

9　授業形態について

実践授業では次の三つの形態を適材適所に取り入れて授業を展開した。

(1)　講義形式の一斉授業一辺倒にせずグループ学習や個別学習を取り入れて個々の学力に応じた手だてをとる。

演習時や練習問題の質問教室の開催時

(2)　演習で板書した解答を全体に自己責任で説明する。また，問答形式を取り入れながら学生相互の理解を深める。

(3)　導入やまとめでは解説や総括が全員に同時に展開してゆきわたらせることができる一斉授業のよさがある。

10　学習の仕方の確立

学習の仕方の確立には次の3つのことが欠かせない。

(1)　自分自身で作り上げた解答を大切にさせ，正解によって間違った箇所を消すことなく，途中の計算式や論理的記述を含む自分の解答の添削をする事を徹底する。

(2)　答のみの記述よりも，鉛筆を走らせながら解答へ至る筋道を大事にした記述に重点をおく。

(3)　筋道だった考え方による正解に着目して，論理を重視する態度，数学の理論的厳密さや論理的記述力を身につける。

i　練習問題の解答の添削

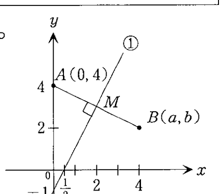
ii　因数分解，分数式の計算，証明問題の記述

11　項目8指導法の見直しと工夫についての実践例

問題と解答［1］

直線$2x-y-1=0$ …①に関し，点$A(0,\ 4)$と対称な点Bの座標$(a,\ b)$を求めよ。

〔解1〕 1. 直線①⊥直線ABである。
その傾きについて
①の傾きは2であるから
$\dfrac{b-4}{a}\times 2=-1$　ただし　$a\neq 0$
$\therefore\ a+2b-8=0$ … ②



2. 線分ABの中点$M\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{b+4}{2}\right)$が
①上にあるから
$2\cdot\dfrac{a}{2}-\dfrac{b+4}{2}-1=0$　　$\therefore\ 2a-b-6=0$ …③

3. ②，③を解いて　$a=4,\ b=2$，よって　$B(4,2)$

〔解2〕 1. ①より　$y=2x-1$　その傾きは2
直線ABの傾きをmとすると，①に垂直であるから
$2m=-1$　$\therefore\ m=-\dfrac{1}{2}$

2. 点を$A(0,\ 4)$通り①に垂直な直線は
$y-4=-\dfrac{1}{2}(x-0)$　$\therefore\ y=-\dfrac{1}{2}x+4$ …②

3. ①，②を解いて　$x=2,\ y=3$　よって交点Mは$M(2,3)$

4. Mは線分ABの中点であるから
$\dfrac{a+0}{2}=2,\ \dfrac{b+4}{2}=3$　$\therefore\ a=4,\ b=2$　$\therefore\ B(4,2)$

問題と解答［2］

$2x^2-6xy+x+3y-1$を因数分解せよ。

〔解1〕 1文字xについて降べきの順に整理

$2x^2-(6y-1)x+3y-1$
$=\{x-(3y-1)\}(2x-1)$
$=(x-3y+1)(2x-1)$

たすき掛け

x^2の項	定数項	xの項
1	$-(3y-1)$ →	$-2(3y-1)$
2	-1 →	-1
		$-6y+1$

〔解2〕 低次数の文字yについて降べきの順に整理
$-3(2x-1)y+(2x^2+x-1)$
$=-3(2x-1)y+(x+1)(2x-1)$ ←定数項を因数分解
$=(2x-1)(x-3y+1)$ ←共通因数$2x-1$の括り出し

問題と解答［3］

xが5以上の自然数であるとき，不等式$2^n>n^2$ … Ⓐ が成り立つことを証明せよ。。

〔証1〕〔1〕$n=5$のとき　Ⓐの左辺$=2^5=32$，右辺$=5^2=25$
であるから　左辺>右辺
$n=5$のとき　Ⓐは成り立つ
〔2〕$k\geqq 5$の場合　$n=k$のとき，Ⓐが成り立つと仮定すると
$2^k>k^2$ … Ⓑ
$n=k+1$のときについて　$2^{k+1}-(k+1)^2=2\cdot 2^k-(k+1)^2$
$>2k^2-(k+1)^2$
$=k^2-2k-1$
$k\geqq 5$であるから　$k^2-2k-1=(k-1)^2-2>0$
よって，$2^{k+1}>(k+1)^2$
すなわち，Ⓐは$n=k+1$のときにも成り立つ
〔3〕ゆえに，Ⓐは5以上の任意の自然数nについて成り立つ（終）

〔証2〕〔証1〕の〔1〕と〔2〕の$2^k>k^2$ … Ⓑまで同じやり方
（示すこと$2^{k+1}>(k+1)^2$）
$n=k+1$のときを考える。Ⓑの両辺に2を掛けると
$2^{k+1}>2k^2$ … ①
$2k^2-(k+1)^2=k^2-2k-1=(k-1)^2-2>0$（∵ $n\geqq 5$）
よって，$2k^2>(k+1)^2$ … ②
①，②より　$2^{k+1}>(k+1)^2$
〔3〕ゆえに，Ⓐは5以上の任意の自然数nについて成り立つ（終）

問題と解答［4］

ある整式Bで$x^4-3x^3+2x^2-1$を割ると，商がx^2+1，余りが$3x-2$である。この整式Bを求めよ。

〔解〕1. ことばの式
被除式＝除式×商＋余り であるから
$x^4-3x^3+2x^2-1=B(x^2+1)+(3x-2)$

2. $B=(x^4-3x^3-2x^2-3x+1)\div(x^2+1)$
$=x^2-3x+1$

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -3 & 1 & & \\
\hline
101 & 1 & -3 & 2 & -3 & 1 \\
 & 1 & 0 & 1 & & \\
\hline
 & & -3 & 1 & -3 & \\
 & & -3 & 0 & -3 & \\
\hline
 & & & 1 & 0 & 1 \\
 & & & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & & & & & 0
\end{array}
$$

「極　限」

例題の指導細案（№1～№8）の抜粋

問題，解法の手順	前提内容，関連事項	解法，技能，計算技術	誤り易い箇所	指導上の留意点
EX1.13　次の関数 $f(x)$ が $x=0$ で連続であるように定数 a の値を求めよ。 $f(x)=\begin{cases}\frac{2-\sqrt{4-ax}}{2x} & (x\neq 0 \text{のとき}) \\ -3 & (x=0\text{のとき})\end{cases}$ 〔解〕 1．連続の定義 極限値＝関数値…① 2．計算（$\frac{0}{0}$の形） (1)極限値…② ㋐有理化 ㋑約分 ㋒極限の計算 (2)関数値 $f(0)$ の値…③ (3) ②，③を①へ代入 a を求める	o連続の定義 ・関数 $f(x)$ は $x=a$ において連続 $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ o 関数の極限値 $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha, \lim_{x\to a} g(x)=\beta(\beta\fallingdotseq 0)$ のとき ・$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\frac{\alpha}{\beta}$ ・$\lim_{x\to a}\{hf(x)+kg(x)\} = h\lim_{x\to a} f(x)+k\lim_{x\to a} g(x) = h\alpha+k\beta$ o関数値（関数 $f(x)$ における $f(a)$ について） 関数 $f(x)$ が x についての整式であるとき、$f(x)$ の x に数 a を代入したときの式の値を $f(a)$ とかく o一次方程式 $ax=b(a\neq 0)$ の解は $x=\frac{b}{a}$	［解］ 1.　$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)\cdots$① 2.(1)　$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{4-ax}}{2x}$ ㋐　$=\lim_{x\to 0}\frac{(2-\sqrt{4-ax})(2+\sqrt{4+ax})}{2x(2+\sqrt{4-ax})}$ $=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{2x(2+\sqrt{4-ax})}$ ㋑　$=\lim_{x\to 0}\frac{a}{2(2+\sqrt{4-ax})}$ ㋒　$=\lim_{x\to 0}\frac{a}{2(2+2)}=\frac{a}{8}\cdots$② (2)　題意より $f(0)=-3\cdots$③ (3)　②,③を①へ代入　$\frac{a}{8}=-3$ $\therefore a=-24$	●連続の定義 （極限値＝関数値）が明確に把握されていない。 ● $\frac{0}{0}$ の解消がまだ自分のものとなっていない。 ●また，$\frac{0}{0}$ の形が出てきた。分母，分子の共通因数 x に着目できない。	●極限値 $\lim_{x\to 0} f(x)$ と関数値 $f(0)$ が一致することが連続であることをきちんと押さえる。 ● $\frac{0}{0}$ の解消として，分母の有理化を行う。 ●さらに $\frac{0}{0}$ の解消として分母，分子を x で約分を行う。 ●関数の極限値の公式を利用して計算を行うことにより極限値を求める。 ● a についての一次方程式と見て，これを解いて a の値を得る。
EX1.15　3次方程式 $x^3-x^2+1=2x\cdots$①は -2 と2の間に3個の実数解をもつことを証明せよ。 〔証〕 1．方程式①を左辺＝0の形に変形する。 2．左辺を関数 $f(x)$ とおく 3．閉区間で連続 4．関数値が異符号 x の値として $x=-2, -1, 0, 1, 2$ をとる。 5．中間値の定理を適用 6．3次方程式の解の個数 7．結論	o関数の連続について ・整関数、指数関数、三角関数 $(\sin x, \cos x)$ は $(-\infty,\infty)$ で連続 ・有理関数、対数関数、三角関数 $(\tan x)$ はその定義域で連続 ・関数 $f(x)$、$g(x)$ がある区間でともに連続ならば、h、kを定数として $hf(x)+kg(x), f(x)g(x), \frac{f(x)}{g(x)}$ （ただし、$g(x)$ が0でない点）も連続 o関数値（関数 $f(x)$ における $f(a)$ について） ・関数 $f(x)$ が x についての整式であるとき、$f(x)$ の x に数 a を代入したときの式の値を $f(a)$ とかく o中間値の定理 ・関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続、$f(a)$ と $f(b)$ が異符号のとき、方程式 $f(x)=0$ は a と b の間に少なくとも1つの実数解をもつ． oガウスの代数学の基本定理 ・複素係数の n 次方程式はちょうどn個の解をもつ．	［証］ 1. $x^3-x^2-2x+1=0\cdots$①′ 2. $f(x)=x^3-x^2-2x+1$ とおく 3. $f(x)$ は整関数だから $[-2,2]$ で連続…② 4. $f(-2)=-8-4+4+1=-7<0$, $f(-1)=-1-1+2+1=1>0$ $f(0)=1>0$ $f(1)=1-1-2+1=-1<0$ $f(2)=8-4-4+1=1>0$ $\left.\begin{array}{l}\therefore f(-2)f(-1)<0 \\ \therefore f(0)f(1)<0 \\ \therefore f(1)f(2)<0\end{array}\right\}\cdots$③ 5. ③において、中間値の定理から方程式①′すなわち①の実数解は−2と−1の間、0と1の間、1と2の間にそれぞれ少なくとも1つ存在する．…④ 6. ①は3次方程式であるから解は3個である…⑤ 7. ④、⑤から①は−2と2の間に3個の実数解をもつ．	●関数 $f(x)$ として $f(x)=x^3-x^2+1$ としてしまう ●ここでも〔−2，2〕で連続であることを示すことを忘れる。 ●端点 $x=\pm 2$ における関数値が異符号であることを示して結論を導く。しかし，3個の実数解の存在を述べるには非常に無理があることに気づかない。	●方程式を x についての整式=0の形に変形して，間違いなく $f(x)$ を定める。 ●3個の実数解の証明には中間値の定理を3回適用しなくてはいけない。 すなわち，異符号の関数値を3組示すことが必要である。 ●関数値として $x=-2, -1, 0, 1, 2$ の整数値の x の値に対応したものをとるとミスが少ない。 ●結論を述べるには，解が3個あることを述べなくてはいけない。そのためにガウスの代数学の基本定理が欠かせない。

「いろいろな曲線」

例題の指導細案　（No.1～No.9）の抜粋

問題，解法の手順

EX14

(1)　極座標が $(a,\frac{\pi}{2})$ である点を通り，始線に平行な直線の極方程式を求めよ。

(2)　次の方程式を極方程式に直せ。

(ア)　$y=\sqrt{3}x$ …………(I)

(イ)　$x^2+(y+5)^2=25$…(II)

(ウ)　$x^2-y^2=4$…………(III)

(3)　次の極方程式を直交座標の方程式に直せ。

(ア)　$\gamma=\cos\theta$……………(I)

(イ)　$\gamma^2(1-2\cos^2\theta)=1$…(II)

〔解〕

(1) 1．求める直線を l，l 上の点 P の極座標を定める。

2．γ と θ の関係式→極方程式

(2)　変換式4つ(ア)(イ)(ウ)共通

(ア) 1．x,yを消去

2．変形（両辺を $\gamma\cos\theta$ で割る）

3．公式を利用

4．θ を求める。

(イ) 1．展望，整理

2．x,y消去

3．γ と θ の関係式

(ウ) 1．x,y消去

2．γ^2で括る

3．2倍角公式，γ と θ の式

(3)　変換式4つ，(ア)(イ)共通

(ア) 1．変形（γ 倍）

2．γ,θ 消去，x,yの式

(イ) 1．展開

2．γ,θ 消去，x,yの式

前提内容，関連事項

◦極方程式

極座標 (γ,θ) について，曲線を表す方程式

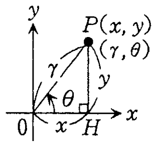
$\gamma=f(\theta)$，$F(\theta,\gamma)=0$（γ と θ の関係式）

を極方程式という。

◦方程式における変換式

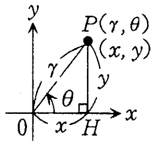
・直交座標による方程式 → 極方程式

$$\begin{cases} x=\gamma\cos\theta \\ y=\gamma\sin\theta \\ x^2+y^2=\gamma^2 \\ \frac{y}{x}=\tan\theta \end{cases}$$



・極方程式 → 直交座標による方程式

$$\begin{cases} \gamma\cos\theta=x \\ \gamma\sin\theta=y \\ \gamma^2=x^2+y^2 \\ \tan\theta=\frac{y}{x} \end{cases}$$



◦鋭角の三角関数の値

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

◦三角関数の基本解の解

・$\tan\theta=a$，$\tan\alpha=a$ $(-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2})$ のとき $\theta=\alpha$，$\pi+\alpha$

◦2倍角公式

・$\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

・$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

◦三角関数の相互関係に関する公式

・$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$　・$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

・$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$　・$1+\cot^2\theta=\mathrm{cosec}^2\theta$

◦計算の簡便化

例(2)　(イ)　$x^2+(y+5)^2=25$に直接$x=\gamma\cos\theta$，$y=\gamma\sin\theta$を代入しても求められるが，ここは展開，整理して$(x^2+y^2)+10y=0$として，$x^2+y^2=\gamma^2$，$y=\gamma\sin\theta$を代入すると答が簡単に求められる。

◦計算のテクニック

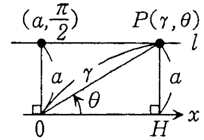
例(3)　(ア)　$\gamma=\cos\theta$からは答は難しいが，両辺をγ倍して$\gamma^2=\gamma\cos\theta$　この式に $\gamma^2=x^2+y^2$，$\gamma\cos\theta=x$を代入して答を得る。

解法，技能，計算技術

〔解〕

(1)　1．$P(\gamma,\theta)$ とする。

2．高さが常に a であるから



$\gamma\sin\theta=a$

(2)　$x=\gamma\cos\theta$…①，$y=\gamma\sin\theta$…②

$x^2+y^2=\gamma^2$…③，$\frac{y}{x}=\tan\theta$…④

(ア) 1．①，②を(I)へ代入して，$\gamma\sin\theta=\sqrt{3}\gamma\cos\theta$

2．$\theta=\frac{\pi}{2}$のときは不適であるから，$\theta\neq\frac{\pi}{2}$　∴ $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sqrt{3}$

3．$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$より $\tan\theta=\sqrt{3}$

4．$\theta=\frac{\pi}{3}$，$\frac{4\pi}{3}$

(イ) 1．(II)から $x^2+y^2+10y+25=25$

∴ $(x^2+y^2)+10y=0$…(II)′

2．②，③を(II)′へ代入して

$\gamma^2+10\gamma\sin\theta=0$

3．γで割って　$\gamma=-10\sin\theta$

(ウ) 1．$\gamma^2\cos^2\theta-\gamma^2\sin^2\theta=4$

2．$\gamma^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=4$

3．$\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$であるから，

$\gamma^2\cos2\theta=4$

(3)　$\gamma\cos\theta=x$…①，$\gamma\sin\theta=y$…②

$\gamma^2=x^2+y^2$…③，$\tan\theta=\frac{y}{x}$…④

(ア) 1．(I)から，$\gamma^2=\gamma\cos\theta$…(I)′

2．①，③を(I)′へ代入，$x^2+y^2=x$

(イ) 1．$\gamma^2-2\gamma^2\cos^2\theta=1$

∴ $\gamma^2-2(\gamma\cos\theta)^2=1$…(II)′

2．①，③を(II)′へ代入して，$x^2+y^2-2\times x^2=1$

∴ $-x^2+y^2=1$

誤り易い箇所

・極座標 $(a,\frac{\pi}{2})$ の位置を定められない。

・γ と θ の関連式の求め方は全く手がつかない。

〈別解〉(1)

1．直交座標の方程式で表すと，　$y=a$

2．極方程式で表す。上式に②を代入して $\gamma\sin\theta=a$

〈別解〉が受け入れ易いが，直接，極方程式を求める方法に馴じませる。

〈別解〉(2)(ア)

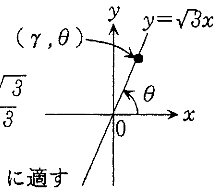
〔I〕$x\neq0$のとき

(I)の両辺を x（$\neq0$）で割って $\frac{y}{x}=\sqrt{3}$

これに④を代入して　$\tan\theta=\sqrt{3}$

∴ $\theta=\frac{\pi}{3}$，$\frac{4\pi}{3}$

〔II〕$x=0$のとき $y=0$，$\theta=\frac{\pi}{3}$，$\frac{4\pi}{3}$ に適する。よって $\theta=\frac{\pi}{3}$，$\frac{4\pi}{3}$



・(II)式へ $x=\gamma\cos\theta$，$y=\gamma\times\sin\theta$を直接代入して，次にどのように処理してよいのか見通しが立たない。

・代入して $\gamma^2\cos^2\theta-\gamma^2\sin^2\theta=4$で終ってしまう。

・$\gamma=\cos\theta$からは全く解決の糸口を見出せない。

・ここでも $\gamma^2(1-2\cos^2\theta)=1$の左辺を展開しないで，$\gamma^2=x^2+y^2$を直接代入して，今後の処理の仕方を全くつかめなくしてしまう。

・$x^2+y^2-2x^2=1$のままで整理しないで終ってしまう。

指導上の留意点

・動径，偏角をとらえ，極からの距離が a，始線からの角が$\frac{\pi}{2}$であることを押さえる。

・平行線 l 上の点 $P(\gamma,\theta)$，Pから始線への垂線を PH とする直角三角形 OPH で PH（高さ）が常に一定に着目して，極方程式を作る。

・ここは展開，整理して $(x^2+y^2)+10y=0$を導いてから代入すると見通しが良くなる。

・2倍角公式 $\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos2\theta$を用いて変形しておく。

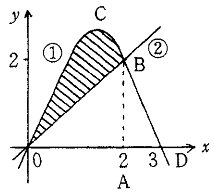
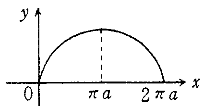
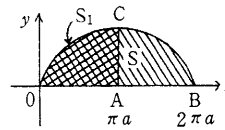
・両辺γ倍して $\gamma^2=\gamma\cos\theta$を導くと見通しが立って，代入すればよいことがわかる。

・左辺を展開，整理して，$\gamma^2-2(\gamma\cos\theta)^2=1$を導いてから代入すると見通しが良くなる。

・同類項をまとめて，$-x^2+y^2=1$ときちんと式を整理しておく。

「定積分の応用」

例題の指導細案（No. 1～No. 9）の抜粋

問題，解法の手順	前提内容，関連事項	解法，技能，計算技術	誤り易い箇所	指導上の留意点
EX1.10　放物線 $y=3x-x^2$ と直線 $y=x$ で囲まれた図形を x 軸の回りに回転してできる回転体の体積Vを求めよ。 解1. (1) 因数分解 (2) $y_1=3x-x^2$…① $y_2=x$…② とおき，そのグラフをかく。 (3) 囲まれた図形を斜線で表示 2. ①,②の交点の x 座標を求める。 3. グラフの上，下の位置表示 4. 図形OABCを回転してできる立体，図形OABを回転してできる立体の体積をそれぞれ V_1, V_2 とするとVはその差に着目する。 5. 公式を用いて求積，計算は被積分関数を簡単にして積分	◦立体の体積と定積分 1つの立体を x 軸に垂直な平面で切ったとき，x における切り口の面積（断面積）$S(x)$ が x の連続関数であるとする。そのとき x 軸上の2点 $x=a$ と $x=b(a<b)$ を通る2平面の間にある立体の部分の体積Vは $V=\int_a^b S(x)\,dx$ ◦回転体の体積 関数 $f(x)$ が区間〔a, b〕で連続で，常に $f(x)\geqq 0$ であるとき，曲線 $y=f(x)$，x 軸および2直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれた図形を x 軸の周りに回転してできる回転体の体積Vは $V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b \{f(x)\}^2dx$ ◦定積分の性質（線形性）・$\int_a^b\{hf(x)+kg(x)\}dx=h\int_a^b f(x)dx+k\int_a^b g(x)dx$ ◦微分積分学の基本定理…区間〔a, b〕で関数 $f(x)$ は連続であるとき，$f(x)$ の不定積分の一つを $F(x)$ とすれば $\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$ ◦不定積分の公式（cは積分定数） ・$n\neq -1$ のとき $\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$	解1. (1) $y=x(3-x)$ (2) グラフは右図 (3) 囲まれた図形は右図の斜線部分  2. $3x-x^2=x$ $x^2-2x=0$ $x(x-2)=0$ $\therefore x=0,\ 2$ 3. 〔0, 2〕では ①≧②　①が②の上 4. $V=V_1-V_2$ 5. $V=\pi\int_0^2 y_1^2dx-\pi\int_0^2 y_2^2dx=\pi\int_0^2(3x-x^2)^2dx-\pi\int_0^2 x^2dx$ $=\pi\int_0^2\{(3x-x^2)^2-x^2\}dx=\pi\int_0^2(8x^2-6x^3+x^4)dx$ $=\pi\left[\frac{8}{3}x^3-\frac{3}{2}x^4+\frac{1}{5}x^5\right]_0^2$ $=\frac{56}{15}\pi$	・回転体の体積の公式を用いるときミスをする。 (1) π を落とす。 (2) y の平方を忘れる。 (3) π, y の平方ともに忘れる。 (4) 面積 $S=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx$ と混同して，回転体の体積 $V=\pi\int_0^2(y_1-y_2)^2dx$ とした計算をする。	・この回転の x 軸に垂直な平面は円であるから，断面積 $S(x)=\pi y^2=\pi\{f(x)\}^2$ であるから π や y の平方がなくては回転体の体積が求められないことを強調する。また，この例題のような一部分を欠いた図形の回転体は，外側の図形を回転させたものから内側の図形を回転させたものをくり抜く，すなわち $V=\pi\int_0^2 y_1^2dx-\pi\int_0^2 y_2^2dx$
EX1.11　a を正の定数とするとき，サイクロイド $x=a(t-\sin t)$…①，$y=a(1-\cos t)$…②（$0\leqq t\leqq 2\pi$…③）と x 軸とで囲まれた図形を x 軸の周りに回転してできる回転体の体積Vを求めよ。 解1. (1) サイクロイドのグラフをかく。 (2) 囲まれた図形を斜線で表示 (3) t と x の対応をみる。 (4) x の増減をみる。 (5) 対称性に着目して図形OACの回転体の体積 V_1 とVの関係をとらえる。 2. $0\leqq x\leqq \pi a$ のとき，x 軸との交点の x 座標を求める。 3. x 軸より上，下の位置関係 4. 公式を用いて計算する。 (1) 置換積分を用いて計算する。 (ア)置換 (イ)微分 (ウ)対応 (エ)変数変換 (オ)変形(半角公式) (2) 置換積分を再度用いる。 上記の(ア)～(エ)のステップをふみ(カ)～(ケ)とする。(コ)定積分の公式を用いて計算する。 5. V_1 からVを求める。	◦サイクロイド ・半径 a の円が x 軸に接しながら，滑らずに回転するとき，円周上の定点 p がえがく軌跡。 ・t と x 及び y の対応表でもグラフの概形がかけるが詳しくかくときは増減を調べ，極値を求めてかく。  ◦回転体の体積 $a\leqq x\leqq b$ において，曲線 $y=f(x)$ と x 軸との間の部分を，x 軸の周りに回転してできる立体の体積Vは $V=\pi\int_a^b y^2dx$ ◦置換積分法の公式 $x=\psi(t)$ とおくとき，$a=\psi(\alpha)$, $b=\psi(\beta)$ ならば $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\psi(t))\psi'(t)dt$ ◦半角公式　$\sin^2\frac{t}{2}=\frac{1-\cos t}{2}$　$\therefore\ 1-\cos t=2\sin^2\frac{t}{2}$ ◦定積分の公式　$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx$ $n\geqq 2$ のとき $I_n=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} & (n\text{が偶数のとき})\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 & (n\text{が奇数のとき})\end{cases}$	解1. (1) グラフは右図 (2) 囲まれた図形は右図の斜線部分  (3) ①,③から $\begin{array}{c\|l} t & 0\to\pi\to 2\pi \\ \hline x & 0\to\pi a\to 2\pi a\end{array}$…④ (4) ①から $\frac{dx}{dt}=a(1-\cos t)\geqq 0$ したがって x は増加 (5) グラフから $x=\pi a$ に関して対称　$V=2V_1$…⑤ 2. ②で $y=0$ より $\cos t=1\ (0\leqq t\leqq\pi)$ $\therefore t=0$ ①から $x=0$ 3. ②から〔0, πa〕では $y\geqq 0$　したがって，x 軸より上 4. $V_1=\pi\int_0^{\pi a}y^2dx$…⑥　(ア) $\begin{cases}x=a(t-\sin t) & \text{…①}\\ y=a(1-\cos t) & \text{…②}\end{cases}$ (イ) ①から $dx=a(1-\cos t)dt$…⑦　(ウ) ④から $\begin{array}{c\|l} x & 0\to\pi a \\ \hline t & 0\to\pi\end{array}$…⑧ (エ) ②,⑦,⑧を⑥へ代入 $V_1=\pi a^3\int_0^\pi(1-\cos t)^3dt$ (オ) $V_1=\pi a^3\int_0^\pi(2\sin^2\frac{t}{2})^3dt=8\pi a^3\int_0^\pi\sin^6\frac{t}{2}dt$…⑨ (カ) $\frac{t}{2}=u$…⑩とおく　(キ) $\frac{1}{2}dt=du$ $\therefore dt=2du$…⑪ (ク) $\begin{array}{c\|l} t & 0\to\pi \\ \hline u & 0\to\frac{\pi}{2}\end{array}$…⑫ (ケ) ⑩,⑪,⑫を⑨へ代入 $V_1=16\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6u\,du$ (コ) $V_1=16\pi a^3\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{5}{2}\pi^2a^3$…⑬ 5. ⑤,⑬から $V=5\pi^2a^3$	・対称性に気づかずに $V=\pi\int_0^{2\pi a}y^2dx$ として求めようとしても定積分の計算ができない。 ・グラフでは x 軸より上にあることを意識せずに定積分を用いている。 ・置換積分では次の3つのことをやらなければいけないがどれか欠けるためにうまくいかない。 (1) 積分変数 (2) 積分区間 (3) 被積分関数	・対称性を用いて，$0\leqq x\leqq\pi$ の中にある部分の回転体の体積 V_1 の2倍としてVを求める。 ・〔0, πa〕では $y\geqq 0$ をかかせることによって意識させる。 ・置換積分を確実に実行するために次の3つの変化をきちんと押さえる。 (1) 積分変数 $x\to t$ dx を dt で表す $dx=a(1-\cos t)dt$ (2) 積分区間 x の範囲→t の範囲 対応表の作成 $\begin{array}{c\|l} x & 0\to\pi a \\ \hline t & 0\to\pi\end{array}$ (3) 被積分関数 $y\to t$ y を t で表す $y=a(1-\cos t)$

「定積分の応用」

数学科学習指導案　　　金　山　　證

科目名	学科・学年	生 徒 数	使用教室	使 用 教 科 書
解析 II	情報工学科３年	47名（男子10名 女子37名）	情報工学科３年	新版 微分と積分(2)（大日本図書）

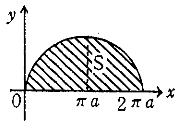
I　全体計画

単 元 名	第 1 章　「定積分の応用」
単元設定の理由	「定積分の応用」には図形の面積，体積，長さや道のりの求め方は積分の定義やその本質に関わっている。そのために積分の概念や法則を深く理解できる。また計量的にとらえるとき，定積分の計算技術，基本的な手法の向上が可能である。また，「定積分の応用」は２重積分の根幹をなし，解析の領域における重要な概念となっている。
指導目標	1．定積分の定義に従って，曲線や直線で囲まれた図形の面積が求められる。 2．閉曲線の囲む図形の面積や，媒介変数で表される曲線で囲まれた図形の面積が求められる。 3．極座標で表される曲線で囲まれた図形の面積が求められる。 4．一般の立体の体積や，曲線や直線，閉曲線，媒介変数で表される曲線で囲まれた図形の回転体の体積が求められる。 5．平面上の曲線，媒介変数で表される曲線，極方程式の表す曲線の長さが求められる。
学生の実態	。 定積分の定義やその基本的な計算（不定積分も含む）や定積分の計算技術（不定積分も含んだ置換積分法，部分積分法）が十分身についていない者が少なくない。また微分の計算も十分とはいえない。
指導計画 全18時間	「定積分の応用」　　対応する例題　　手作り復習プリント 1．面積　… 6.5時間 → EX1.1 ～ EX1.6 → No. 1，No. 2 2．体積　… 5.5時間 → EX1.7 ～ EX1.12 → No. 3，No. 4 3．長さ　… 3 時間 → EX1.13 ～ EX1.15 → No. 5 4．道のり … 2 時間 → EX1.16 ～ EX1.17 → No. 6 5．問題　… 1 時間
評価の観点	。 面積，体積，長さや道のりの求め方を理解するとともに，実際に計算をしてそれらを求めることができたか。

II　本時の指導計画

主　題	媒介変数で表される曲線と図形の面積
本時の目標	媒介変数で表される曲線で囲まれた図形の面積が求められる。

展　開

指 導 項 目	学 習 内 容	指導上の留意点	時配
〔導入〕 問題把握	EX1.4　a を正の定数とするとき，サイクロイド $x=a(t-\sin t)$…①　$y=a(1-\cos t)$…② $(0\leqq t\leqq 2\pi$…③$)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積Sを求めよ。	・簡単な図を用いて，問題をとらえ，解法の見通しを立てさせる。	5分
解法の見通しを立てる。 グラフ 表	1.(1) サイクロイドのグラフをかく。 グラフは右図 (2) 囲まれた図形は斜線で図示。 右図の斜線部分 (3) t と x の対応をみる。 対応表 $\begin{array}{c\|c} t & 0 \to 2\pi \\ \hline x & 0 \to 2\pi a \end{array}$ …④  (4) x の増減をみる。微分 $\dfrac{dx}{dt}=a(1-\cos t)\geqq 0$ したがって x は単調増加 2．x 軸との交点の x 座標を求める。②で $y=0$ より　$\cos t=1$ $\therefore\ t=0,\ 2\pi$　①から　$x=0,\ 2\pi a$ 3．x 軸より上，下の位置関係　②から　$y\geqq 0$ したがって x 軸より上	1(1) サイクロイドのグラフは ・t と x 及び y の対応表からかく ・半径 a の円が x 軸に接しながら，滑らずに回転するとき，円周上の定点Pがえがく軌跡からかく 2　対応表はグラフがかけないときや，置換積分のとき有効である。 3　$y\geqq 0$ をかかせることによって意識させて定積分 $S=\int_0^{2\pi a} y dx$ を用いる。	5分
〔展開〕 見通しにもとづいて完行する。 面積公式 置換積分法 半角公式 結果を確かめる。	4．公式を用いて求積　$S=\int_0^{2\pi a} y dx$ …⑤ (1) 置換積分法を用いて計算する。 (ア) 置換　$x=a(t-\sin t)$ … ①　$y=a(1-\cos t)$ … ② (イ) 微分　①から　$dx=a(1-\cos t)dt$ … ⑥ (ウ) 対応　④から $\begin{array}{c\|c} x & 0 \to 2\pi a \\ \hline t & 0 \to 2\pi \end{array}$ …⑦ (エ) 変数変換②,⑥,⑦を⑤へ代入 $S=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2 dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt$ (オ) 半角公式を用いる $S=a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\dfrac{1+\cos 2t}{2}\right)dt$ $=a^2\int_0^{2\pi}\left(\dfrac{3}{2}-2\cos t+\dfrac{1}{2}\cos 2t\right)dt$ $=a^2\left[\dfrac{3}{2}t-2\sin t+\dfrac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi}=3\pi a^2$ 〃	4　置換積分を確実に実行させるために次の３つの変化をきちんと押さえる。 (1) 積分変数 $x\to t$，dx を dt で表す。$dx=a(1-\cos t)dt$ (2) 積分区間 x の範囲→ t の範囲 対応表の作成 $\begin{array}{c\|c} x & 0 \to 2\pi a \\ \hline t & 0 \to 2\pi \end{array}$ (3) 被積分関数　$y\to t$ y を t で表す　$y=a(1-\cos t)$ 〔別解〕 $S=2\int_0^{\pi}\left(2\sin^2\dfrac{t}{2}\right)^2 dt$ $=8a^2\int_0^{\pi}\sin^4\dfrac{t}{2}dt$　置換して $S=16a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 u du=16a^2\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}=3\pi a^2$ 〃	5分 5分
演　習	P7 Q3 ①,② 教師の指名により解法を板書する。 他の者は①,②をやり③へ進む	③は $\dfrac{dx}{dt}\leqq 0$ で単調減少 $S=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(-3\sin^4 t\cos^2 t)dt$ に注意	20分
〔まとめ〕	演習問題の解説から自己の解答を添削する。 媒介変数による面積公式を用いて求積できる。	・机間巡視 ・公式を正しく使って，計算できたか確認する。	5分
評　価	媒介変数で表される面積公式を正しく用いて，面積が求められたか。		