

# 大学編入試験対策用の実践的演習問題例について

山田 聖典\*

## Comments on the Example of Practical Exercises for University Entrance Examination

Kiyonori YAMADA

### Abstract

We show that some “newtype” of exercises could be used as a practical study for university entrance examination. These exercises have physical contents in background which we will study in university, and then it may be highly possible to be taken in the entrance examination.

### 1. 序 章

私は10年間ほど大学編入試験における数学の指導を行っているが、幾つかの大学において実施される大学編入試験問題を見ると、

- ①「典型のおよび標準的な問題」
- ②「大学で学ぶ専門分野に関係のある問題」

の2つに分類することができる。①は難易度の違いはあるが、大雑把に言えば高専で使用している教科書の内容であり、②は大学で学ぶ数学、物理学や専門分野に登場する内容であり、高専で通常用いている教材には書かれていないトピックス的なものになっている。

ここで②の例となっている問題を2つ紹介する。

#### 問題 1

$N=1, 2, 3, \dots$  に対して、区間  $0 \leq x \leq 2$  で定義された次の連続関数を考える。

$$F_N(x) = \begin{cases} (N^2 + N)(2x - Nx^2) & (0 \leq x \leq \frac{2}{N}) \\ 0 & (\frac{2}{N} \leq x \leq 2) \end{cases}$$

- (1)  $F_1(x), F_2(x)$  のグラフを描け。
- (2)  $\int_0^2 F_N(x) dx$  を求めよ。
- (3)  $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^2 F_N(x) dx$  を求めよ。
- (4) 各点  $x$  に対し、 $F(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} F_N(x)$  とおくと、 $\int_0^2 F(x) dx$  を求めよ。

(H13 富山大工学部編入試験問題)

#### 問題 2

$2 \times 2$  行列  $\sigma_1$  が  $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  で与えられるとき、次の問に答えよ。

- (1)  $\sigma_1$  の固有値と大きさが1の直交固有ベクトルを求めよ。
- (2)  $\sigma_1$  を対角化する変換行列  $P$  を求め、 $\sigma_1$  を対角化せよ。
- (3) 対角化した行列を  $\sigma_3$  とするとき、

$$\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_1 = 2i\sigma_3, \quad \sigma_2 \sigma_2 = I$$

を満足する行列  $\sigma_2$  を求めよ。ここで  $i$  は虚数単位、 $I$  は  $2 \times 2$  の単位行列である。

(H14 富山大工学部編入試験問題)

問題1は一様収束に関する問題で、有名な高木貞治の「解析概論」等にも同様の例が載っている。内容は、極限操作と積分はその極限が一様収束しないと可換でないというものである。問題2は量子力学で登場するパウリ行列に関する問題である。ともに問題の背景を全く知らなくても、高専で学ぶ数学の知識だけで解けるようになっている。

数学の試験問題が①、②どちらのタイプになるのかは問題作成者の趣向によるのであろうが、大学によっては②のような問題が今後も出題される可能性は大いにある。それならば先を読んで②のタイプで出題されるような内容を演習問題として作成し、学生の受験勉強教材として使わせてはどうかと考えるようになった。

そのような経緯もあり、現在数学と物理学の融合的な演習問題集を作成している。これは富山商船高専の中期計画にも記載されている事項で、現時点で23問題を作成し、問題ごとにその物理的背景をコメントとして解説してある。23の問題の中から幾つかを選び、専攻科の講義である「数学・物理学演習」における演習プリントとして活用したり、本科4、5年生に対して編入試験勉強用の課題プリントとして出題している。いくつかの具体的な内容例を次章で紹介する。

この研究教育紀要では、どこかの大学編入試験に出題されてもおかしくないと思われる問題を幾つか紹介し、そしてそれらの問題を大学編入志望である学生達に実際に解いてもらったときの状況を報告する。

## 2. いくつかの演習問題例

序章でも触れたが、現在「数学・物理学における融合演習問題選」(タイトルは仮)なるものを作成中で、その中の問題を専攻科の講義における課題や意欲のある学生に対する演習課題として利用している。以下では演習問題の具体例を4つ紹介し、問題ごとに簡単なコメントを記しておく。

### 演習問題例1

次の行列を考える。

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1)  $J_3$ の固有値, 固有ベクトルを求めよ。

(2)  $J_{\pm} = \frac{J_1 \pm iJ_2}{2}$  とするとき, 交換関係

$$[J_{\pm}, J_3] = J_{\pm}J_3 - J_3J_{\pm} \text{ を求めよ。}$$

(3)  $J_{\pm}$  はどんな働きをする行列か。

この問題は序章で紹介した問題2と同様に、量子力学におけるスピンの議論がネタ元になっている。具体的にはSU(2)群のカルタン標準形に関する問題となっている。受験数学としては、行列の計算および固有値・固有ベクトルに関する内容となっている。(1)(2)は単純な計算問題であるが、(3)は(2)の結果を理解する必要があるが、この問題のヤマ場となっている。SU(2)群の基本表現を考えているので行列は2×2となっているが、3×3行列を扱うものとして例えば3次元回転群の基本表現に関する同様の問題を作る事もできる。(先述の「数学・物理学における…」には出題してあるが、ここでは紹介しないでおく)

### 演習問題例2

次の問題に答えよ。

$$(1) \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx$$

(2)  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  とし,  $A$  を実対称な2次の正方行列と

するとき, 次の(2重)積分を求めよ。

$$\iint_D dx_1 dx_2 \exp(-\mathbf{x}' A \mathbf{x})$$

$$D = \{(x_1, x_2) \mid 0 \leq x_1, 0 \leq x_2\}$$

この問題は統計力学や場の量子論等によく登場する多重ガウス積分の有名な公式を扱ったものである。簡単にするために2成分のガウス積分にしてある。行列式, 固有値・固有ベクトルなどの行列の諸問題や, 2重積分, ガウス積分の公式といった盛り沢山の内容が1つの問題に集約されていて, 入試問題として良問であると思われるが, 私の知る限りでは演習問題例2に関するような問題は今の所どこにも出題されていない。この問題のメインは当然(2)で, 問題のポイントは行列の対角化および2重積分の変数変換となっている。さらにトピックス的なものとして, グラスマン数を変数とした同様のガウス積分を考える事ができて, これを併記するとさらに面白い事が起こっているのが分かるのであるが, さすがに入試問題には出題されないであろうからここでは紹介しないでおく。

### 演習問題例3

次の関数を考える。ここで $\mu, k, T$ は正の定数とする。

$$f(x) = \frac{1}{e^{(x-\mu)/kT} + 1}$$

(1)  $x \geq 0$ での $y=f(x)$ のグラフの概形を求めよ。

(2)  $y=f(x)$ と両軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(3)  $T \rightarrow 0$ のとき, (1)のグラフはどうなるか。

また(2)で求めた面積はどうなるか。

この問題は(量子)統計力学や電子物性の分野において頻繁に出てくるFermi-Dirac統計に従う粒子の分布関数を扱ったものでFermi-Dirac統計に関わる学問分野を勉強した人なら誰もが計算のチェックを行った事のある内容となっている。この演習問題例も, 微分の応用(増減と極値), 積分の応用(面積の計算), 極限といった微積分の総合的問題となっていて, 入試問題として極めて実践的なものとなっている。私のお気に入りの問題の一つで, どこかの大学編入試験に出

題されてもおかしくないと思っているものである。(1)  
(2)の計算はほとんど straight forward で、(3)は  
 $x < \mu$  と  $x > \mu$  で場合分けする所がポイントとなっている。

**演習問題例 4**

$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  である指数関数型の行列  $A(t) = e^{tX}$  を

考える。正方行列  $B$  の指数関数は次のように定義され  
るとする。

$$e^B = E + B + \frac{B^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!}$$

このとき以下の問いに答えよ。

- (1)  $X^n$  を求めよ。
- (2)  $A(t)$  を求めよ。
- (3) 行列  $X$  の意味を述べよ。

この問題は2次元平面内における回転の有限変換に  
関するもので、2次元の無限小回転変換を引き起こす  
生成子  $X$  から、有名な回転行列が導かれる事を示して  
いる。解くのに用いられる数学的内容は、行列の  $n$  乗  
計算や  $\sin x, \cos x$  のマクローリン展開であり、これ  
も実践的な複合問題となっている。

生成子  $X$  によるパラメーター  $t$  の無限小変換を表す、  
2成分ベクトル  $x(t)$  についての微分方程式

$$\frac{d}{dt} x(t) = Xx(t)$$

を考えるのも入試対策として教育的な問題になると思  
われる。この微分方程式を解くと、 $X$  による  $t$  の有限  
変換が  $e^{tX}$  である事が示される。

**3. 学生への出題および学習状況**

私は4年間数学特講と呼ばれる講義を担当していた。  
これは富山商船高専4年前期における選択科目の一つ  
で、大学編入対策を主目的とした講義内容を行ってきた。  
具体的には実践的な問題集や大学編入試験の過去  
問題を出题し演習および解説を行うのであるが、そこ  
で前章の演習問題例を自学自習用参考課題として幾つ  
か出題している。他の出題例として、基礎的な勉強を  
終わらせ希望大学の過去問題等を解いている5年生  
(の一部) に対して予想問題として出題したり、その  
時期に3年の授業を担当している場合には3年生の一  
部の学生にも出題している。

そのような問題の出題に対する学生の反応であるが、  
正直言って大半の学生はほぼ無関心である。上記のよ  
うに3, 4, 5年生に出題しているのであるが、4年生  
は編入試験用の受験勉強を始めたばかりの学生が多く、

基本的な問題の復習をしている段階なのであまり関心  
を示してくれていない。3年生はまだ基本的内容を学  
んでいる段階なのでなおさらである。とはいえ、大半  
が無関心であるという事には物足りなさを感じ、残念  
でならない。しかし中には非常に関心を示し問題を解  
いたという学生も数名いた。以下ではそのような学生  
の状況を報告する。

まず5年生 A 君のケースについて紹介する。A 君  
は4年の終わり頃までに基礎的勉強はもちろん、さら  
にハイレベルな実践的問題集をも一通り勉強を終わら  
せていた。彼が大学編入試験の過去問題について質問  
するために私を訪ねて来たときに、「こんな問題があ  
るけど解いてみるか」と前章の演習問題例の2, 3, 4  
を渡した。彼が今まで勉強してきた問題集等にはなかつ  
たタイプの問題であったらしく、目を輝かせて「解い  
てみます」と言って問題を持っていった。後日彼に会  
った時に問題の解き具合を尋ねたところ、「一応全部解  
けました。面白い問題ですね。」と教えてくれた。彼  
はその後東京大学の編入試験に合格したのであるが、  
私にとってその結果は今後の受験指導にとっての貴重  
なサンプルとなった。もちろん必要十分条件とはなら  
ないが、前章で紹介した演習問題例がハイレベル大学  
編入合格の目安になるのではと考えるようになった。

次に4年生の B 君, C 君のケースについて紹介する。  
私は彼らが3年生のときに授業を持っていたのである  
が、3年の終わり頃に上記の演習問題を答えをつけて  
渡した。4年になって B 君から出題した演習問題につ  
いての質問を受けたのであるが、そのときに C 君は  
その演習問題を全部解いたという事を聞いた。C 君の  
実際の解答を見た訳ではなく偶々正解となったのかも  
知れないが、問題の内容を考えるとそんな事は起こり  
にくく、3年の段階で問題が全部解けたと言うことに  
正直驚いた。上記の目安の事を考えると C 君はかな  
り期待していいのではと思える。B 君もその後問題を  
全部解いたそうである。

以上の3人は演習問題を出题して強く反応してくれ  
た学生であるが、5年になって受験勉強が佳境に入  
ってくると興味を持って問題を解いてくれそうな学生が  
他にもいると思われるので、新たな演習問題を考え、  
機を見て出題しようと考えている。

**4. まとめ**

本紀要は私の富山商船高専における大学編入指導の  
一つである実践的演習問題の作成および出題について  
報告したものである。2章で紹介した演習問題例はす  
べて現在作成中である「数学・物理学における融合問

題選（仮称）」からピックアップして編集し直したもので、そこには受験勉強用の教材として使えそうな問題が他にも幾つかある。今後いろんな大学において出題された入試問題を参考にしつつ、そのような問題を10数問ほど作成し、4、5年に対する大学編入試験対策としての教材にまとめたいと考えている。