「ベクトル」の指導に関する一考察 II

金山　證*

A Method of Teaching "Vector" Part II

Satoru KANAYAMA

Abstract

The "vector" is an essential concept and applied in the domain of matrix and determinant as the basics of higher linear algebra.

I discussed teaching "vectors in one plane" in my previous paper, "A Method of Teaching "Vector" Part I". In this paper I discuss teaching "vectors in space". I point out three effective ways of teaching "vectors in space" to college students:

1 To select important 42 examples and to make a detailed teaching plan (pp. 10－18) in accordance with the students' levels of attainment and utilize it for the lesson .
2 To enhance students' understanding through plain and conscientious teaching.
3 To inspire students' interests by explaining the basic outlines about "vectors in space".

1．はじめに

（1）高専の数学の内容は質的に高い。しかも中学校の内容の一部が組み込まれて膨大な範囲となっている。実力が伴わない学生にとっては多くの点で悪影響がでている。計算が遅い，つまらないところでつまずく，満足な答案が書けないなどである。2年時になると，数学に集中して取り組めない学生も出ている。成績中位者の一部から下位者は自分の頭を使って，ノートに鉛筆を走らせて解こうとしないのである。また，継続的な学習活動ができない学生が学年進行するに連れて多く見受けられる。定期試験における期間のみの勉強にとどまる消極的な学生が多くなっているのである。そのような学生にとっては，数学的感覚を研く努力を怠ったために直観・洞察力や思考力が貧弱なものになり，他の分野に適用できるような真の実力を身につけることは難しくなっている。

（2）高校生向きの「空間におけるベクトル」は2年生で学ぶ数学Bの科目で扱い，「平面上のベクトル」に引き続いて学ぶことになっている。授業時数に制限があるために，「空間におけるベクトル」で扱う内容を狭めている。座標平面に平行な平面の方程式だけを扱い，空間における直線と平面，直線と平面の垂直の概念や直線の方程式は取り扱わないことになっている。

一方，高専生向きでは，線形代数と科目の名称が具体的で内容も多くなっている。高校生向きの内容に加えて，直線の方程式や平面の方程式の一般形（法線ベクトル使った平面の方程式）までを扱う。また，高校の内容と同様に，空間における直線と平面，直線と平面の垂直の概念は取り扱わないことになっている。

2　研究の趣旨

高専では「空間におけるベクトル」を，一定の水準を保ちながら，一まとまりとした概念として取り扱う意図から，直線の方程式，平面の方程式の一般形までを扱うことになっている。しかし，教材として必要最小限のものしか取り扱っていない。したがって，内容が盛り沢山に対して個々の内容は希薄なものとなっている。章末の問題や傍用問題集に対応できる標準的な実力をつけるには，なるべく授業で必要な数学をマスターできるように例題を補充しなくてはいけない。また，「空間におけるベクトル」の指導において，ベクトルの成分表示と位置ベクトルの指導の順序がまちま

*教養学科

（平成19年3月31日受付）

ちである。著者はここに研究のきっかけを見出した。

「空間におけるベクトル」の本質に触れさせるという方針で，補充例題など妥当な例題として，多種類な問題の難易別の問題数の選定及び配列の決定を目指し，現行の教科書・問題集を精査し，重要な項目を精選する。指導細案をまとめ上げ，指導実践を試みる。

3　研究の内容

（1）教師の願い

「平面上のベクトル」で取り上げた内容と同様の扱いができる「空間におけるベクトル」を直感的に理解できる素地はある程度養われているものと考えられる。そこで，本著では「空間におけるベクトル」を数学の対象として正しく把握させ，まとまった知識と一貫した考え方を体得させることを主眼とする。

① 「空間におけるベクトル」の概念の把握と計算力や論理的記述力を養成する。

② 教科書及び問題集の難問を除く標準的な問題が解ける。

（2）例題の選定と解法

「空間におけるベクトル」を扱う基礎となる概念や原理・法則を用いる例題，重要な性質を用いる例題，章末の練習問題や傍用問題集の解法に適した例題を内容別に42題を厳選するなど，その例題の選定を工夫する。それらの配列は例題の程度を順次高めていく方法を採用する。解法については簡潔で，要領を得た記述に徹した模範解答を提示するように心掛ける。別解は積極的に取り上げて解法の幅を広げるようにする。これによって，多面的で豊富な解法が身につき，「空間におけるベクトル」の理論に対する再発見・認識につながり，他の分野に応用ができる真の力になると考えられる。

4　「空間におけるベクトル」の指導の意義

次の6点から意義を述べる。

（1）「空間におけるベクトル」の概念は「平面上のベクトル」と同様に数学全般にわたる基本，線形代数学やベクトル解析の理論の基礎，他の諸科学への応用としてきわめて重要である。「関数」と並んで高専数学の中心として実り多い成果を示している。学問としての数学を通して，数学における考え方，進め方を知り，筋道を立てて物事を考えるしかたを身につけるという意味でも大切である。

（2）「空間におけるベクトル」を定義し，矢線（有向線分）で相等条件など「空間におけるベクトル」を捉える。「空間におけるベクトル」を有向線分の大きさと向きとか，3つの実数の組というような量をまとめて1つのものとして取り扱うことは根幹である加法・減法（加法の逆演算）・実数倍に関する演算が線形性という簡単な法則に従っていることに基づいている。

また，「平面上のベクトル」と同様の性質が保存されることを知って「空間におけるベクトル」の概念についての理解を深める。また，例題を通して演算に習熟する。

（3）幾何的に定義した「空間におけるベクトル」を1対1に対応する成分で表すこと，すなわち3つの実数の組と同等に扱うことによって，代数的な取り扱いができることを知る。また，高次元ベクトルへの拡張を内蔵していると考えられるなどその有用性，及び数学的な方法や考え方の理解を深めることができる。

（4）基本的な性質である「空間におけるベクトル」の分解を用いたり，2つの「空間におけるベクトル」の垂直条件や平行条件，点が直線上・平面上にある条件を考えたりする。「空間におけるベクトル」を用いると空間図形の性質の考察がし易いこと,また，ベクトルは，「平面上のベクトル」,「空間におけるベクトル」に見られるように次元に関係なく扱うことができること,これらのことからベクトルに対する素朴な量感覚の上に，有用なもの，いろいろな性格を持ったものであることを知る。

（5）「空間におけるベクトル」において，位置ベクトルの考えを導入し，それを用いたいろいろな問題の解法を通じて，空間図形の性質の考察・研究ができることを体験させる。また，直線，平面，球とその接平面の方程式の問題の追求に位置ベクトルの考えを用いた手法を扱うことを通して数学的な方法や考え方の理解を深めることができる。

（6）「空間におけるベクトル」の内積を利用し，空間図形の性質の考察を通して適切かつ能率的に活用する能力を伸ばす。また,「空間におけるベクトル」を用いる証明の簡潔さを知る。

5　「空間におけるベクトル」の指導について

「空間におけるベクトル」は3節から成り立っている。1節では空間における点・直線・平面，2節では空間のベクトル，3節では直線・平面・球とその接平面の方程式を扱っている。

1節では空間における直線と平面，直線と平面の垂直の概念を取り扱う。また，3垂線の定理を理解させる。中学校で学習した空間における直線と平面，直線と平面の垂直の概念の再確認，定着と深化を図り，空間の座標の概念を導入する。また，2点間の距離が求められるようにする。

2節では空間のベクトルを取り扱う。空間のベクトルは平面の場合と同様にして定義できる。和・差・実数倍などの定義，また，それらに関して，平面の場合

に述べた法則や性質は空間の場合についてもそのまま成り立つ。空間のベクトルの概念を取り扱ってからベクトルの成分表示を取り上げる。成分による演算も平面の場合と同様に成り立つ。また，ベクトルの方向余弦が求められるようにする。さらに，ベクトルの内積を平面の場合と同様に定義する。成分で表した内積のいろいろな計算ができるようにする。空間における位置ベクトルを扱うと同時にベクトルの分点の座標の求め方に適用させて公式化する。平面上の位置ベクトルを扱って平面図形の解法に用いたように，空間における位置ベクトルを用いて空間図形の解法を研究する手段を一通り理解させ，それを応用できる力をつける。

3節では直線・平面・球とその接平面の方程式を取り扱う。空間における直線のベクトル方程式，媒介変数方程式，また，平面の方程式を取り扱う。次に，点と平面の距離を理解させる。さらに，球の方程式を取り扱う。球面と平面の交わりや接平面を求めることを通して球の概念の理解を深化させる。

「空間におけるベクトル」で取り扱う質の高い高専数学を学生のものにするための指導の在り方を2つの側面，(1)教材の配列の妥当性，(2)指導法の見直しと工夫・改善，から考察をする。

(1) 教材の配列の妥当性

教材の配列で，高校では以前に「代数・幾何」の分野で取り扱っていた空間における直線と平面，直線と平面の垂直，直線の方程式，及び，平面の方程式の一般形については現在の数学Bの分野では取り扱わないことになっている。しかし，それらの内容は，次の3つの点からたいへん重要なものとなっている。①「空間におけるベクトル」としてその内容を充実させる。②ベクトルの概念の理解を深化させる。③空間図形を処理する能力を向上させる。したがって，すべて取り上げて指導したい

また，教材の順序が異なっているのは，①位置ベクトル，②ベクトルの成分表示，の2箇所である。その関連性から分点の座標をどこで取り上げるかが問題となる。その取り扱いについては，「空間におけるベクトル」の概念の連続性や指導の重点の置き方で見ると次のア，イの2通りがある。

ア　空間のベクトル→ベクトルの成分→位置ベクトル・分点の座標の順で扱う。位置ベクトルの概念と分点の座標を同時に扱うときにはベクトルの成分の取り扱いを先にする。「平面上のベクトル」における取り扱いに準じたものとなっている。

イ　空間のベクトル→位置ベクトル→ベクトルの成分・分点の座標の順で扱う。位置ベクトルの概念と分点の座標を切り離して扱うときには位置ベクトルの取り扱いを先にしてベクトルの成分のところで分点の座標を同時に取り扱う。

アの順で指導する方が次の3点から，「空間におけるベクトル」の力を付けるに相応しいと考えられる。

①教材の統括性

第2節の空間のベクトルにおける総合的な計算力やテクニックが身に付いているかを判断する材料となるに相応しい位置ベクトル・分点の座標を第2節の空間のベクトルにおける締め括りと見なし，ベクトルの成分を扱った後に位置ベクトルを用いて空間図形を含め，空間のベクトルを統合的に取り扱い，その概念の確実な定着を図る。

②難易度の順次性

第2節の空間のベクトルの定義の直後，成分表示が具体例として提示できる点から，成分表示を扱った直後，やや難解な空間図形の解決手段として用いる位置ベクトルを扱う。

③指導の効率性

空間図形には分点を取り込んだ問題も数多くある。位置ベクトルの考え方を用いて解く場合が多い。したがって位置ベクトル・分点の座標を切り離さないで取り上げる方が指導の効率がよい。

(2) 指導法の見直しと工夫・改善

教科書（高専の数学2：森北出版）ではいろいろな制約のために定着を図るための十分な配慮がなされているとはいい難い。教科書の不備な箇所や解説不足或いは解説がなく問題が与えられていて学生が難解に感じる箇所は定義・公式，例題の補充をする。

授業では板書を通して要点を押さえた解説に徹し，時間の許す限り教科書の行間の意味をひもといたり，細かい計算や論理の記述に飛躍がないよう十分注意を払う。分かり易い，丁寧な指導を心掛ける。

① 事前に指導細案（10ページから18ページに掲載）を作成して授業を展開する。

② 板書事項で要点を押さえ，理解しやすい授業実践を心掛ける。

③ 証明する同一問題の例題を取り上げて，空間の概念を用いた一般的な証明,空間のベクトルを用いた証明の2つを示す。その比較からベクトルによる証明が簡潔にできるよさを理解させる。

7　参考文献

(1) 数学B・改訂版数学B　永尾汎　数研出版

(2) 数学B及びその改訂版　藤田宏・前原昭二 東京書籍

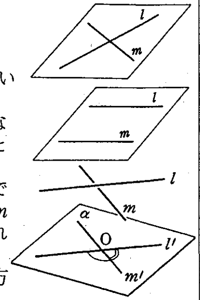
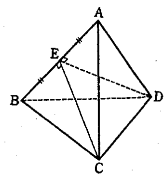
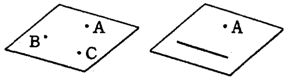
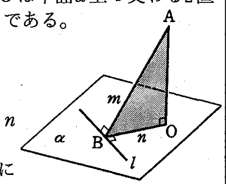
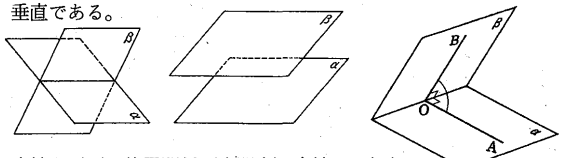
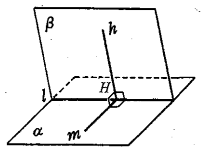
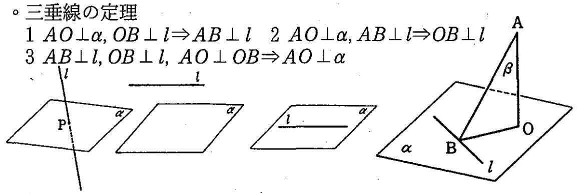
(3) 数学B・数学B改訂版　小松勇作　旺文社

(4) 線形代数　田河生長　大日本図書

(5) 新編 高専の数学2　田代嘉宏・難波完爾　森北出版

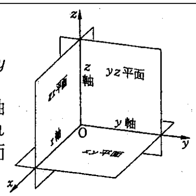
(6) 高等学校学習指導要領解説　数学編　文部省

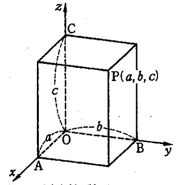
指導細案(No.1)

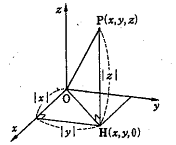
問題，解法の手順	前提内容，関連事項	解法，技能，計算技術	誤り易い箇所	指導上の留意点
EX 1　正四面体$ABCD$において，辺ABはその対辺CDと垂直であることを証明せよ。 証　辺ABの中点をEにとり，補助線CE, DEを引く。 辺ABは平面CDEに垂直であることを示す。	◦2直線の位置関係（空間上） 1 交わる　… 2 平行である…　}同じ平面上にある 3 ねじれの位置にある　…同じ平面上にない  ◦2直線のなす角（2直線は平行でないとき） 任意の1点Oを通り，l, mにそれぞれ平行なl', m'をひくと，l', m'のなす角は点Oのとり方に関係なく一定。この角をいう。 1，3の場合，特にl, mのなす角が直角であるとき，lとmは垂直であるといい$l\perp m$と書く。垂直な2直線が交わるとき，それらは直交するという。 平行な2直線の一方に垂直な直線は他方にも垂直である。	証　辺ABの中点をEとすると，CEは正三角形ABCの，DEは$\triangle ABD$の，中線であるから $CE\perp AB$, $DE\perp AB$ したがって，直線ABは平面CDEの交わる2直線CD, DEに垂直であるから，ABは平面CDEに垂直で，辺ABは平面CDE上の辺CDと垂直である。（終）〃 	• ABの中点Eをとり，補助線CE, DEを引くことは思いつかない。 • CEは正三角形CABの，DEは正三角形DABの中線であり，対辺ABとの関係に気づかない。 • CE DEは$\triangle CDE$上の交わる2直線，また，CDも$\triangle CDE$上にあることに気づかない。	• 図形の証明には補助線を引くような閃きが欠かせない。 • 正三角形の中線は対辺に垂直に交わること，対辺ABは共通であることに注目する。 • 直線ABが，平面CDE上の交わる2直線CF, DEと直交するならば，$AB\perp$平面CDE, CDも平面CDE上にあるから$AB\perp CD$に着目する。
EX 2　平面α外の1点から，α上の任意に引いた直線lに垂線mを下ろし，その足をBとする。平面α上で，点Bにおいてlに垂直な直線nを引き，点Aから直線nに垂線を下ろして，その足をOとすると，AOは平面αに垂直であることを証明せよ。 証　OがBと一致するかしないかで場合分け 一致しない場合，平面OABをβとおき$l\perp\beta$，βに含まれるAOとαの垂直をいう。	◦平面の決定 1 1直線上にない3点 2 1直線とその上にない1点 3 交わる2直線 4 平行な2直線  ◦2平面の位置関係（空間上）2平面をα, β 1 交わる　…α, βが共有点をもつとき，2平面はその点を通る1つの直線（交線）を共有 2 平行である…α, βが共有点をもたないとき　$\alpha\parallel\beta$	証　〔1〕OがBと一致する場合，AOはABと一致し，$AO\perp l$, $AO\perp n$となる。即ち，AOは平面α上の交わる2直線l, nに垂直であるから，$AO\perp\alpha$である。 〔2〕OがBと一致しない場合 3点O, A, Bを含む平面をβとすると $l\perp m$, $l\perp n$ 即ち，lは平面β上の交わる2直線m, nに垂直であるから$l\perp\beta$ したがって平面βに含まれる直線AOについて　$AO\perp l$ また，$AO\perp n$よりAOは，平面α上の交わる2直線l, nに垂直であるから，$AO\perp\alpha$（終）〃 	• OがBと一致するかしないかで場合分けの必要性を感じない。 • 一致する時　AOとα上の2直線l, nの関係に着目できない。 • 一致しない時　lと平面β上の2直線m, nの関係，また，β上の直線AOとα上の2直線l, nの関係に着目できない。	• 一致した時は，AOはα上の2直線に垂直であるから自明である。 • 一致しない時は，3点O, A, B，すなわち，m, nを含む平面βに着目し，lとm, nさらにlとβの垂直関係，また，AOもβ上にあるから，AOとlの垂直関係，次に，α上の2直線の垂直関係から$AO\perp\alpha$をとらえる。 直線が平面上の2直線と垂直ならば平面と垂直，逆に平面と垂直ならば平面上の任意の直線と垂直を用いる。
EX 3　平面αの1つの垂線hを含む任意の平面βは，αに垂直であることを証明せよ。 証　lとhの交点Hをとり，α上でlに垂直な補助線mを引く。2平面のなす角の定義はhとmのなす角に着目。	◦2平面のなす角 交わる2平面の交線上の点から，各平面上に，交線に垂直な直線を引くとき，これらの直線のなす角をいう。 2平面α, βのなす角が直角であるとき，α, βは垂直であるといい，$\alpha\perp\beta$と書く。 直線hが平面αの1つの垂線であるとき，hを含む平面は，αに垂直である。 	証　βとαの交線をlとする。lとhの交点Hを通り，lに垂直な直線mをα上に引く。hは平面αに垂直であるからhはα上の直線mに垂直となり，2平面α, βのなす角は直角である。 $\therefore\ \beta\perp\alpha$　（終）〃 	• 2平面$\alpha\perp\beta$の定義は交線l上の点から，各平面上に，lに垂直に引いた2直線のなす角が直角であることが自分のものになっていない。したがって交線l，さらに，α上でlに垂線mを引くことに気づかない。	• 補助線を引いて，αとβのなす角に着目することは必要不可欠である。 • $m\perp l$となるα上のmをとると，$h\perp\alpha$であるから，$h\perp m$がとらえられる。したがってα, βのなす角は直角となり，$\beta\perp\alpha$を結論づけることができる。
EX 4　3点$O(0,0,0)$, $A(1,2,1)$, $B(-1,-2,1)$について次の問いに答えよ。 (1) 2点A, B間の距離を求めよ。 (2) 2点A, Bから等距離にあるx軸上の点Pの座標を求めよ。 (3) 3点O, A, Bから等距離にあるyz平面上の点Qの座標を求めよ。 解 (1) 2点間の距離公式 (2) x軸上の点Pは，$P(x,0,0)$と表される。$AP=BP$より等式ができる。 (3) yz平面上の点Qは，$Q(0,y,z)$と表される$OQ=AQ$, $OQ=BQ$よりy, zに関する連立方程式ができる。	◦直線と平面の位置関係（空間上）直線l，平面α 1 交わる　…lとαがただ1つの点Pを共有するときをいい，その点Pをlとαの交点という。 2 平行である　…lとαが点を共有しないときをいい，$l\parallel\alpha$と書く。 3 直線が平面に含まれる…lとαが異なる2点を共有するときをいう。 直線hが，平面α上のすべての直線に垂直であるとき，hとαは直交するまたは垂直であるといい，$h\perp\alpha$と書く。このときhをαの垂線という。 直線hが，平面α上の交わる2直線l, mと直交するならば，hはαの垂線である。	解 (1) $AB=\sqrt{(-1-1)^2+(-2-2)^2+(1-1)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ (2) $P(x,0,0)$とする。　$AP=BP$より，$AP^2=BP^2$ $\therefore\ (x-1)^2+(0-2)^2+(0-1)^2$ $=(x+1)^2+(0+2)^2+(0-1)^2$ $x^2-2x+1+4+1=x^2+2x+1+4+1$ $\therefore\ 4x=0\ \therefore x=0$　したがって点Pの座標は，$P(0,0,0)$ 〃 (3) $Q(0,y,z)$とする。 $OQ=AQ$より$OQ^2=AQ^2$ $\therefore\ y^2+z^2=(0-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2$ 整理すると　$2y+z=3$　…① $OQ=BQ$より$OQ^2=BQ^2$ $\therefore\ y^2+z^2=(0+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2$ 整理すると　$2y-z=-3$　…② ①，②を解いて　$y=0$, $z=3$ したがって，点Qの座標は，$Q(0,0,3)$ 〃	• 三平方の定理を用いて導いた距離公式の適用に慣れていない。 • 問題(2)のx軸上の点の座標がとれない。 • 問題(3)のyz平面上の点の座標がとれない。 • 点Qは3点O, A, Bから等距離にあるから$OQ=AQ=BQ$が成り立つが，方程式が解けない。	• 2点間の距離公式，各座標の差の平方の和の平方根を用いる中で暗記する。 • x軸上にあるからx座標は任意xにとり，yとz座標を0にとる。 • yz平面上にあるから，x座標を0にとり，yとz座標は任意yとzにとる。 • 等式$OQ=AQ$, $OQ=BQ$の2つに分解して，連立方程式を作り，解くことができる。
EX 5 $\vec{a}=(3,5,-2)$, $\vec{b}=(-1,2,-3)$のとき，$2\vec{a}-3\vec{b}$の成分表示と大きさを求めよ。 解　ベクトルの成分による計算 大きさの定義	◦三垂線の定理 1 $AO\perp\alpha$, $OB\perp l\Rightarrow AB\perp l$　2 $AO\perp\alpha$, $AB\perp l\Rightarrow OB\perp l$ 3 $AB\perp l$, $OB\perp l$, $AO\perp OB\Rightarrow AO\perp\alpha$ 	解　$2\vec{a}-3\vec{b}=2(3,5,-2)-3(-1,2,-3)$ $=(6,10,-4)-(-3,6,-9)$ $=(9,4,5)$ 〃 $\lvert 2\vec{a}-3\vec{b}\rvert=\sqrt{9^2+4^2+5^2}=\sqrt{122}$ 〃	• $2\vec{a}=2(3,5,-2)=(6,5,-2)$と計算してミスをする。和，差についても同様のミスをする。 • $\lvert 2\vec{a}-3\vec{b}\rvert$がとれない。	• ベクトルの実数倍は成分すべてを実数倍する。和，差も同様であることを確認する。 • $2\vec{a}-3\vec{b}=(9,4,5)=\vec{c}$とおくと$\lvert 2\vec{a}-3\vec{b}\rvert=\lvert\vec{c}\rvert$ $=\sqrt{9^2+4^2+5^2}$で与えられる。

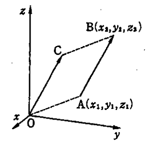
指導細案(No. 2)

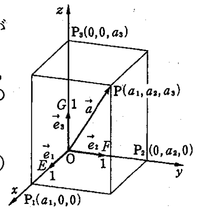
問題, 解法の手順	前提内容, 関連事項	解法, 技能, 計算技術	誤り易い箇所	指導上の留意点
EX 6 空間内に点$A(1,-1,1)$, $B(2,-3,3)$があるとき, ベクトル$\overrightarrow{AB}$の成分表示とその大きさを求めよ。 解 2点を結ぶベクトル成分表示とその大きさの定義に着目	◦ 空間の座標 ・座標軸…1点Oで互いに直交する3本の軸, Oを原点とする数直線, それぞれをx軸, y軸, z軸という。点Oを座標の原点という。 ・座標平面…x軸とy軸とによって, y軸とz軸とによって, z軸とx軸とによって定められる平面をそれぞれxy平面, yz平面, zx平面をいう。	解 ベクトルの和 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$であるから, ベクトルの差より $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ $=(2,-3,3)-(1,-1,1)$ $=(2-1,-3+1,3-1)=(1,-2,2)$ 〃 $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=\sqrt{9}=3$ 〃	・$\overrightarrow{AB}$がベクトルの差$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$で表されることに気づかない。 また, 平行移動による考え方も思いつかない。したがって$\overrightarrow{AB}$の成分表示ができない。 ・$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$がとれない。	・ベクトルの和$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$から$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$を得る。また, 点$A(1,-1,1)$を原点$O(0,0,0)$に移す平行移動によって点$B(2,-3,3)$が移る点を$C$とすると$C(2-1,-3+1,3-1)$ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}=(1,-2,2)$としても求まる。 ・$\overrightarrow{AB}=(1,-2,2)=\vec{C}$とおくと$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=\lvert\vec{C}\rvert=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}$で与えられる。
EX7 $\vec{a}=(3,-2,-4)$と$\vec{b}=(x+1,8,2y)$が平行になるように実数x,yの値を定めよ。 解 平行であるための必要十分条件を適用。	・座標空間…座標軸の定められた空間 ・座標…P:与えられた任意の点 点Pを通り, yz平面, zx平面, xy平面に平行な平面が, それぞれx軸, y軸, z軸との交点をA,B,Cとする。それらの各座標軸上での座標がそれぞれa,b,cであるとき, この3つの実数の組(a,b,c)を点Pの座標という。$P(a,b,c)$と書く。	解 平行になる必要十分条件は成分が0でない場合は, 比の値が等しいこと（連比が成り立つこと）である。 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{8}{-2}=\dfrac{2y}{-4}$ $\therefore\ \dfrac{x+1}{3}=-4=\dfrac{y}{-2}$ これを解いて $x=-13,\ y=8$ 〃	・平行条件として成分の比の値に等しい（連比が成り立つ）ことに慣れていない。	・$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{b}=m\vec{a}$ (m:実数)を用いて, $(x+1,8,2y)=m(3,-2,-4)$ $=(3m,-2m,-4m)$, ベクトルの相等から$x+1=3m$, $8=-2m$, $2y=-4m$であるから$x=-13$, $y=8$, $m=-4$を得る。比の値が等しい解法は易しい。
EX8 $\vec{a}=(2,-2,1)$, $\vec{b}=(0,1,-1)$に対して (1) $\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角θ ($0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$)を求めよ。 (2) $\vec{a}$と$\vec{b}$に垂直な単位ベクトル$\vec{c}$を求めよ。 解 (1) なす角θの余弦を内積の定義で求答 (2) 垂直条件を内積$=0$, 単位ベクトルは大きさが1で立式	◦ 平行移動と座標 x軸の方向にα, y軸の方向にβ, z軸の方向にγだけ平行移動するとき, 原点Oは点(α,β,γ)に, 点(x,y,z)は点$(x+\alpha,y+\beta,z+\gamma)$に移る。 点$A(x_1,y_1,z_1)$を点$B(x_2,y_2,z_2)$に移す平行移動によって, 原点$O$の移る点を$C$とすれば$C(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_2)$ ◦ 2点間の距離 点$P(x,y,z)$からxy平面に下ろした垂線をPHとすれば, $H(x,y,0)$であるから$OH^2=x^2+y^2$ $\triangle POH$は直角三角形であるから, $OP^2=OH^2+PH^2=x^2+y^2+z^2$ $\therefore OP=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 2点$A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$が与えられたとき,	解 (1) $\lvert\vec{a}\rvert^2=2^2+(-2)^2+1^2=9\quad\therefore\lvert\vec{a}\rvert=3$ $\lvert\vec{b}\rvert^2=0^2+1^2+(-1)^2=2\quad\therefore\lvert\vec{b}\rvert=\sqrt{2}$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot0+(-2)\cdot1+1\cdot(-1)=-3$ $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert}=\dfrac{-3}{3\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$であるから $\theta=\angle A0x\quad\angle A0x'=45^\circ\quad\theta=180^\circ-45^\circ=135^\circ$ 〃 (2) $\vec{C}=(x,y,z)$とする。$\vec{a}$にも$\vec{b}$にも垂直であるから, $\vec{a}\cdot\vec{c}=2x-2y+z=0$ …① $\vec{b}\cdot\vec{c}=y-z=0$ …② $\vec{c}$は単位ベクトルであるから $\lvert\vec{C}\rvert=1\ \therefore\lvert\vec{C}\rvert^2=1\ \therefore x^2+y^2+z^2=1$ …③ ①＋②より $2x-y=0\ \therefore y=2x$ …④, ④を②に代入して $z=2x$ …⑤ ④, ⑤を③に代入して $9x^2=1\ \therefore x=\pm\dfrac{1}{3}$ $\vec{c}=\pm\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$ 〃	・内積の定義から, なす角θの余弦の値を求めるとき, 内積の値が求められない。 ・$\cos\theta$の値からθの値が求められない。 ・問題(2)の垂直条件を内積$=0$に置き換えて考えられない。 ・単位ベクトルの成分表示ができない。	・内積の成分表示による計算は対応する成分の積の和で与えられる。 ・単位円で考えるとき, $\cos\theta$はx座標で与えられる。$x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$と単位円との交点からθを求められる。 ・垂線ということは, なす角θが直角であるから, $\cos\theta=\cos90^\circ=0$となり, 内積$=0$である。 ・$\vec{c}=(x,y,z)$が単位ベクトルであるとすると$\lvert\vec{c}\rvert=1\ \therefore\lvert\vec{c}\rvert^2=1$ 成分表示すると, $x^2+y^2+z^2=1$と表される。
EX 9 ベクトル$\vec{e}=(l,m,n)$は単位ベクトルであり, $\vec{e}$とx軸, y軸の正の向きとのなす角が, それぞれ45°, 60°であるとする。l,m,nの値を求めよ。ただし, $n\geqq0$とする。 解 成分, l,m,nは方向余弦であること, $\vec{e}$は単位ベクトルであることに着目	$AB=OC$, $C(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$であるから, $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ ◦ 空間のベクトル 平面ベクトルと同様に有向線分ABの向きと長さだけを考え, 位置を無視したとき, 空間のベクトル$\overrightarrow{AB}$で表す。1つの文字$\vec{a}$でも表す。 ・ベクトルの相等 2つのベクトルが等しい＝大きさと向きが一致する。 ・零ベクトル, 単位ベクトル, ベクトルの平行, 加法, 実数倍の定義・法則・性質 …平面の場合と同様に成立つ。	解 $\vec{e}$は単位ベクトルであるから$\lvert\vec{e}\rvert=1\ \therefore\lvert\vec{e}\rvert^2=1\ \therefore l^2+m^2+n^2=1$ …① $\vec{i}=(1,0,0)$, $\vec{j}=(0,1,0)$とすると, 条件から $l=\vec{e}\cdot\vec{i}=\cos45^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $m=\vec{e}\cdot\vec{j}=\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$ l,mを①に代入して整理すると $n^2=\dfrac{1}{4}$ $n\geqq0$から $n=\dfrac{1}{2}$ よって $l=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $m=n=\dfrac{1}{2}$ 〃	・大きさが1の単位ベクトルの成分表示に少しずつ慣れる。 ・方向余弦の考え方が自分のものになっていない。	・$\lvert\vec{e}\rvert=1\ \therefore\lvert\vec{e}\rvert^2=1$ 成分表示すると, $l^2+m^2+n^2=1$と表される。 ・$\vec{a}$の方向余弦をベクトルとする成分は$\vec{a}$と同じ向きの単位ベクトルであるから, $\vec{e}=(l,m,n)$のl,m,nは方向余弦として, $l=\cos45^\circ$, $m=\cos60^\circ$から, またnは単位ベクトルの関係式$l^2+m^2+n^2=1$から求められる。
EX10 3点$A(1,2,3)$, $B(-1,0,3)$, $C(1,2,-3)$を頂点とする三角形の面積Sを求めよ。 解 三角形の面積は内積を用いた公式を空間のベクトルの成分で表示して適用	◦ ベクトルの成分 ・基本ベクトル …$E(1,0,0)$, $F(0,1,0)$, $G(0,0,1)$をとり, $\overrightarrow{OE}=\vec{e}_1$, $\overrightarrow{OF}=\vec{e}_2$, $\overrightarrow{OG}=\vec{e}_3$とおく, この3つのベクトルをいう。 ・基本ベクトル, 成分表示 …空間ベクトル$\vec{a}$に対し, $\vec{a}=\overrightarrow{OP}$となる点$P$をとり, $P(a_1,a_2,a_3)$とする。 $\overrightarrow{OP_1}=a_1\vec{e}_1$, $\overrightarrow{OP_2}=a_2\vec{e}_2$, $\overrightarrow{OP_3}=a_3\vec{e}_3$とすると, $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}$ $\therefore\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3$（基本ベクトル表示） a_1,a_2,a_3をそれぞれ$\vec{a}$のx成分, y成分, z成分といい, $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$（成分表示）	解 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-1,0,3)-(1,2,3)=(-2,-2,0)$ $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(1,2,-3)-(1,2,3)=(0,0,-6)$ 点Aを含む3頂点の面積公式 Sは $S=\dfrac{1}{2}\sqrt{(x_1y_2-x_2y_1)^2+(x_1y_3-x_3y_1)^2+(x_2y_3-x_3y_2)^2}$ …① $x_1=x_2=-2$, $x_3=0$, $y_1=y_2=0$, $y_3=-6$を①に代入して $S=\dfrac{1}{2}\sqrt{\{-2\cdot0-(-2)\cdot0\}^2+\{-2\cdot(-6)-0\cdot0\}^2+\{-2\cdot(-6)-0\cdot0\}^2}$ $=\dfrac{1}{2}\sqrt{12^2+12^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2\cdot12^2}=6\sqrt{2}$ 〃	・原点O, $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$の3点を頂点とする三角形の面積は公式を適用して求められる。しかし, この問題のようにO以外の3点の場合にはとまどう。 ・成分表示による三角形の面積公式の適用は複雑である。	・点$A(1,2,3)$を原点Oに移す平行移動によって, $B(-1,0,3)$, $C(1,2,-3)$は$B'(-2,-2,0)$, $C'(0,0,-6)$に移ることから$\triangle OB'C'$の面積を求める方法と解答のように点Aに関する$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$の成分から$\triangle ABC$の面積を求める方法があることを知る。 ・平行四辺形の面積をSとすると$S^2=\lvert\vec{a}\rvert^2\lvert\vec{b}\rvert^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$で与えられるから, この値の平方根の$\dfrac{1}{2}$として求めると少々易しくなる。

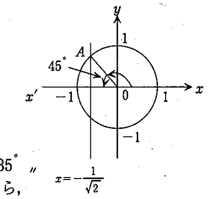


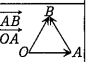




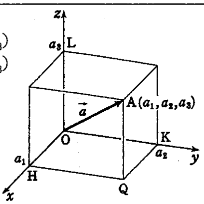
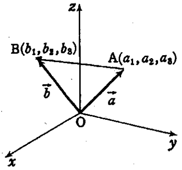
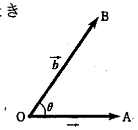
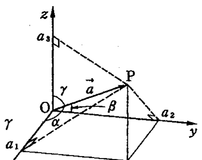
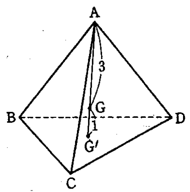
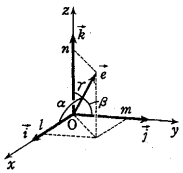
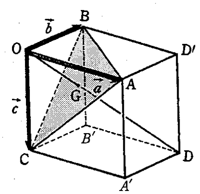




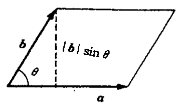
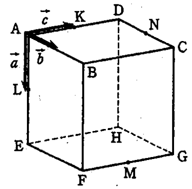
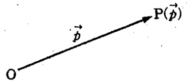
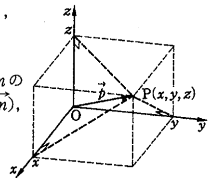
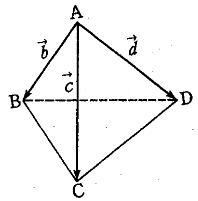
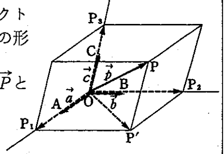
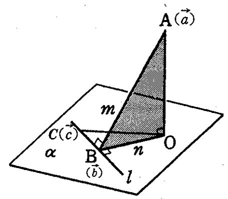
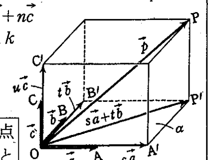
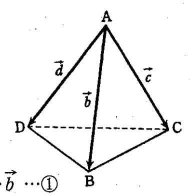




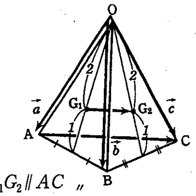
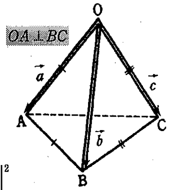
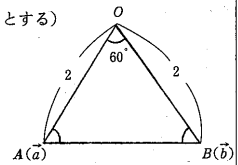
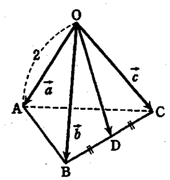
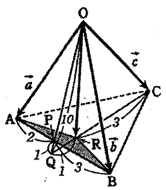
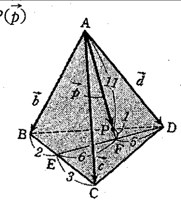
指導細案(No. 3)

問題，解法の手順	前提内容，関連事項	解法，技能，計算技術	誤り易い箇所	指導上の留意点
EX11 3点$A(-1,2,-4)$, $B(9,-8,6)$, $C(1,0,-5)$について，次の各点の座標を求めよ。 (1) 線分ABを3:2の比に内分する点，外分する点 (2) 線分ABの中点 (3) $\triangle ABC$の重心 解 (1) 分点の座標の公式 (2) 中点の座標の公式 (3) 重心の座標の公式	◦ベクトルの成分と相等・演算 1 $(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$ 2 $(a_1,a_2,a_3)-(b_1,b_2,b_3)=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$ 3 $m(a_1,a_2,a_3)=(ma_1,ma_2,ma_3)$  ◦ベクトル$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$の大きさ $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$となる点$A$をとり，$A(a_1,a_2,a_3)$とする $OA^2=a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2$であるから $\|\vec{a}\|^2=a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2$ $\therefore \|\vec{a}\|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}$ ◦2点$A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$を結ぶ$\overrightarrow{AB}$の成分と大きさ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(b_1,b_2,b_3)-(a_1,a_2,a_3)$ $=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)$ $\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$  	解 (1) 内分点を$P(x,y,z)$とすると， $x=\frac{2\cdot(-1)+3\cdot 9}{3+2}=\frac{25}{5}=5$, $y=\frac{2\cdot 2+3\cdot(-8)}{3+2}=\frac{-20}{5}=-4$, $z=\frac{2\cdot(-4)+3\cdot 6}{3+2}=\frac{10}{5}=2$ $\therefore P(5,-4,2)$ 〃 外分点を$Q(x,y,z)$とすると，QはABを$3:(-2)$に分ける点 $x=\frac{-2\cdot(-1)+3\cdot 9}{3-2}=29$, $y=\frac{-2\cdot 2+3\cdot(-8)}{3-2}=-28$, $z=\frac{-2\cdot(-4)+3\cdot 6}{3-2}=26$ $\therefore Q(29,-28,26)$ 〃 (2) 中点を$M(x,y,z)$とすると， $x=\frac{-1+9}{2}=4$, $y=\frac{2+(-8)}{2}=-3$, $z=\frac{-4+6}{2}=1$ $\therefore M(4,-3,1)$ 〃 (3) 重心を$G(x,y,z)$とすると， $x=\frac{-1+9+1}{3}=3$, $y=\frac{2+(-8)+0}{3}=-2$, $z=\frac{-4+6-5}{3}=-1$ $\therefore G(3,-2,-1)$ 〃	• 問題(1)の前半は内分点の公式を適用する。後半は外分点の公式を用いるが，どのように用いるかわからない。 • 問題(2)の中点は1:1の比に内分する点として見通しがたつ。 • 問題(3)の重心は中線を2:1の比に内分する点として見通しがたて易い。	• $m:n$の比に内分するときはそのまま公式を用いるが，外分するときは$m:(-n)$（または$-m:n$）の比に分けると考えて公式を適用する。 • 内分点の公式において$m=n=1$として，中点の公式を適用する。 • 頂点と対辺の中点を2:1に内点する点として重心の公式$\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$を適用する。
EX12 ベクトル$\vec{a}=(2,1,-5)$, $\vec{b}=(1,-2,-4)$, $\vec{c}=(3,-4,1)$のとき，$\vec{p}=(5,-1,9)$を，次の形の式（1次結合）で表せ $\vec{p}=k\vec{a}+l\vec{b}+m\vec{c}$ k,l,mは実数 解 $\vec{p}=k\vec{a}+l\vec{b}+m\vec{c}$を成分表示後，ベクトルの相等を成分に適用	◦平行条件$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$のとき $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$とする。$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}=m\vec{b}$となる実数$m$が存在するから $\therefore a_1=mb_1$, $a_2=mb_2$, $a_3=mb_3$ $\therefore \vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$ ◦ベクトルの内積 $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$のなす角をθとするとき 定義 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta$ ただし $0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ $\vec{a}=\vec{0}$または$\vec{b}=0$のとき$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$  ◦内積の性質 1 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ 2 $(m\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(m\vec{b})=m\vec{a}\cdot\vec{b}$ 3 $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ 4 $\vec{a}\cdot\vec{a}=\|\vec{a}\|^2\geqq 0$（等号は$\vec{a}=\vec{0}$のときに限る） 5 $\|\vec{a}\cdot\vec{b}\|\leqq\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$ 6 $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ 7 $\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$ または $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$	解 $(5,-1,9)=k(2,1,-5)+l(1,-2,-4)+m(3,-4,1)$ $\therefore (5,-1,9)=(2k+l+3m, k-2l-4m, -5k-4l+m)$ ベクトルの相等より $\begin{cases}2k+l+3m=5 & \cdots①\\ k-2l-4m=-1 & \cdots②\\ -5k-4l+m=9 & \cdots③\end{cases}$ l消去 ①×2+② $5k+2m=9$ …④ ②×2−③ $7k-9m=-11$ …⑤ m消去 ④×9+⑤×2 $59k=59$ $\therefore k=1$, ④より$m=2$, ①より$l=-3$ $\therefore \vec{p}=\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c}$ 〃	• 1次結合の式に，ベクトルの成分を代入し，実数倍と和の法則を用いて，成分毎に等式をまとめる。この際，符号ミスをしがちである。 • ベクトルの相等条件を用いることができないために，k,l,mの値を求めることができない。 • k,l,mの値を求めて，$\vec{p}$を求めないで終る。	• 実数倍，k:実数，$k(a_1,a_2,a_3)=(ka_1,ka_2,ka_3)$，和，$(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$のように計算法則を確実に適用する。 • ベクトルの相等条件，各成分を比較して，k,l,mに関する連立方程式を作り，k,l,mについて解く。 • 求められたk,l,mの値を$\vec{p}$の式に代入して$\vec{p}$を$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$で表す。
EX13 4点$A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$, $D(\vec{d})$を頂点とする四面体において，Aと$\triangle BCD$の重心$G'(\vec{g'})$を結ぶ線分を3:1の比に内分する点を$G(\vec{g})$するとき，$\vec{g}$を$\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$で表せ 解 重心の位置ベクトル$\vec{g'}$を$\vec{b},\vec{c},\vec{d}$で，また，内分点の位置ベクトル$\vec{g}$を$\vec{a},\vec{g'}$で表示	◦内積の成分表示 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$のとき，$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$とする。 1 $\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+a_3\vec{e_3})\cdot(b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2}+b_3\vec{e_3})$, $\vec{e_i}\cdot\vec{e_j}=\begin{cases}1 & (i=jのとき)\\ 0 & (i\neq jのとき)\end{cases}$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ 2 $\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$ 3 $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$ ◦ベクトルの方向余弦 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{a}=\overrightarrow{OP}$ $\overrightarrow{OP}$がx軸，y軸，z軸の正の向きとなす角をα,β,γとするとき $a_1=\|\overrightarrow{OP}\|\cos\alpha$, $a_2=\|\overrightarrow{OP}\|\cos\beta$, $a_3=\|\overrightarrow{OP}\|\cos\gamma$ $\therefore \|\overrightarrow{OP}\|^2=a_1^2+b_2^2+a_3^2=\|\overrightarrow{OP}\|^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)$ よって $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$  	解 $G'(\vec{g'})$は$\triangle BCD$の重心であるから $\vec{g'}=\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$ …① また，$G(\vec{g})$は線分AG'を3:1の比に内分するから $\vec{g}=\frac{\vec{a}+3\vec{g'}}{3+1}$ …② ①を②に代入して $\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$ 〃  	• 重心は中線を2:1に内分する点としてその扱いに慣れてきている。 • $G'\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}\right)$をそのまま用いて$AG'$を3:1の比に内分する点$G$の位置ベクトルを求めようとするとミスにつながる。	• 重心の公式$\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$を用いる。 • 計算し易くするために$G'(\vec{g'})$のように位置ベクトルを定めておいて，$AG'$を3:1の比に内分する計算を行うと確実である。
EX14 平行六面体$OAD'B-CA'DB'$において，$\triangle ABC$の重心Gは線分OD上にあることを証明せよ。 証 点Gが線分OD上にあるための必要十分条件であるk:実数 $\overrightarrow{OD}=k\overrightarrow{OG}$を適用	$\sin\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$を$\vec{a}=\overrightarrow{OP}$の方向余弦という。 $\vec{a}$の方向余弦を成分とするベクトル $(\sin\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{a_1}{\|\vec{a}\|},\frac{a_2}{\|\vec{a}\|},\frac{a_3}{\|\vec{a}\|}\right)=\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ は$\vec{a}$と同じ向きの単位ベクトル …① ①の単位ベクトルを$\vec{e}=(l,m.n)$, $\vec{i}=(1,0,0)$, $\vec{j}=(0,1,0)$, $\vec{k}=(0,0,1)$ とすると $\cos\alpha=\vec{e}\cdot\vec{i}=l$ $\cos\beta=\vec{e}\cdot\vec{j}=m$, $\cos\gamma=\vec{e}\cdot\vec{k}=n$ $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=l^2+m^2+n^2=1$, l,m,nを方向余弦という。  	証 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$とすると， 右図において $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{D'D}$ $=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ また，$\overrightarrow{OG}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ よって $\overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{OG}$ ゆえに，Gは線分OD上にある。（終）〃  	• 重心GがODにあることを示す方法がわからない。 • ベクトル$\overrightarrow{OD}$の表し方がわからないために$\overrightarrow{OG}$との関係づけができない。	• 3点O,G,Dは1直線上にある，ベクトルでは$\overrightarrow{OD}=k\overrightarrow{OG}$ (k:実数)を示す。 • Gは$\triangle ABC$の重心であるから，3つの位置ベクトルを用いて表すことができるように，Dも3つの位置ベクトルを用いて表すと関係づけられる。

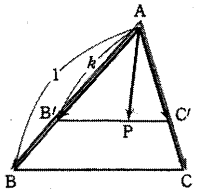
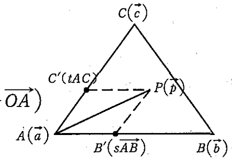
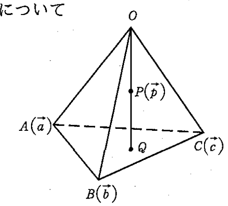
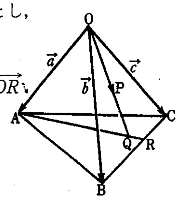
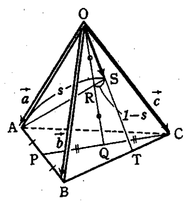
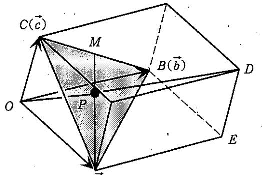
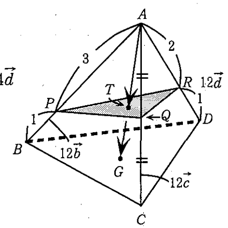
指導細案(No. 4)

問題，解法の手順	前提内容，関連事項	解法，技能，計算技術	誤り易い箇所	指導上の留意点
EX15 立方体$ABCD-EFGH$，において，4辺AD, AE, FG, CDの中点を，それぞれK, L, M, Nとするとき，この4つの中点は，同一平面上にあることを証明せよ。 証 同一線上にない3点K, L, Nの定める平面αについて点Mが平面α上にあるための必要十分条件を適用	◦三角形の面積 ベクトル$\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$と$\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$が作る平行四辺形の面積Sは$\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角をθとすれば $S=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\sin\theta$, $\sin^2\theta+\cos^2=1$より $S^2=\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2-\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2\cos^2\theta=\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$ $=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$ $=(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2$ よって三角形の面積はSの半分であるから， $\frac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2}$ 	証 $\overrightarrow{AE}=2\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=2\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=2\vec{c}$ とおくと $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AL}=-\vec{c}+\vec{a}$ $\overrightarrow{KN}=\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{DN}=\vec{c}+\vec{b}$ $\overrightarrow{KM}=\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FM}$ $=-\vec{c}+2\vec{b}+2\vec{a}+\vec{c}$ $=2\vec{a}+2\vec{b}=2(\vec{a}+\vec{b})$ このとき $\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{KN}=(\vec{a}-\vec{c})+(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}+\vec{b}$ ゆえに $\overrightarrow{KM}=2(\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{KN})=2\overrightarrow{KL}+2\overrightarrow{KN}$ よって，点Mは，3点K, L, Nの定める平面上にある。（終）〃 	• 4点が同一平面上にあることを示す方法がわからない。 • 中点があるから位置ベクトルを定めるのがわかるが原点Oに関する位置ベクトルをとると計算が難しくなる。また，$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$に定めると計算が分数になりミスし易い。	• 点Mが，3点K, L, Nの定める平面上にあることを示す。 点Kに関するベクトル，$\overrightarrow{KM}$が $\overrightarrow{KM}=h\overrightarrow{KL}+k\overrightarrow{KN}$と書けることを示す。 • 点$A$に関する位置ベクトル3つをとり，しかも$2\vec{a}$のように計算がスムーズにできるように定める。
EX16 正四面体$ABCD$において，辺ABはその対辺CDと垂直であることをベクトルを用いて証明せよ。 証 点Aを始点にとり，B, C, Dの位置ベクトルを定めて，$\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{CD}$の内積$=0$を示す。	◦位置ベクトル 1点Oを固定し，任意の点Pに対し，$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$となるベクトル$\vec{p}$を点$P$の位置ベクトルといい，点$P$を$P(\vec{p})$と書く。原点$O$を基準として，$P(x, y, z)$とすると，$P$の位置ベクトルの成分表示は， $\vec{p}=(x, y, z)$ ◦線分の分点，三角形の重心 3点$A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$について線分ABを$m:n$の比に分ける点を，$P(\vec{p})$，線分ABの中点を$M(\vec{m})$，$\triangle ABC$の重心を$G(\vec{g})$とすると $\vec{p}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$, $\vec{m}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$, $\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$  	証 $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$とする。 三角形はすべて正三角形であるから， 角は60°の等角，辺は等辺 $\therefore \begin{cases}\vec{b}と\vec{c},\ \vec{b}と\vec{d}のなす角は60^\circ \\ \|\vec{b}\|=\|\vec{c}\|=\|\vec{d}\|\end{cases}$ $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=\vec{d}-\vec{c}$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\vec{b}\cdot(\vec{d}-\vec{c})=\vec{b}\cdot\vec{d}-\vec{b}\cdot\vec{c}$ $=\|\vec{b}\|\|\vec{d}\|\cos60^\circ-\|\vec{b}\|\|\vec{c}\|\cos60^\circ=0$ したがって $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$（終）〃 	• EX 1で取り上げた問題をベクトルを用いて解く。原点Oに関する位置ベクトルをとると，計算が複雑になり，見通しを悪くする。 • $AB\perp CD$をベクトルを用いて示す方法がわからない。 • 正四面体の各三角形は正三角であることに着目できないために内積の計算ができない。	• 点Aに関する位置ベクトル3つをとり，計算がし易く，見通し良くできるようにする。 • ベクトル$\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{CD}$の内積$=0$であることを示す。 • 正三角形の辺は等辺，2辺のなす角は60°の等角であることに着目して，内積の値を求めることができる。
EX17 平面α外の1点Aから，α上の任意に引いた直線lに垂直mを下ろし，その足をBとする。平面α上で，点Bにおいてlに垂直な直線nを引き，点Aから直線nに垂線を下ろして，その足をOとすると，AOは平面αに垂直であることをベクトルを用いて証明せよ。 証 OがBと一致する場合は明らか，一致しない場合，A, Bを位置ベクトルで表示して，l上にBと異なる点Cをとり，補助線OC（$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$）を引く。$\overrightarrow{AO}$と$\overrightarrow{BC}$の内積$=0$を示す。	$\vec{a}=(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}=(x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c}=(x_3, y_3, z_3)$, $\vec{p}=(x, y, z)$, $\vec{m}=(x', y', z')$, $\vec{g}=(x'', y'', z'')$とすると $x=\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n}$, $y=\dfrac{ny_1+my_2}{m+n}$, $z=\dfrac{nz_1+mz_2}{m+n}$, $x'=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, $y'=\dfrac{y_1+y_2}{2}$, $z'=\dfrac{z_1+z_2}{2}$ $x''=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $y''=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}$, $z''=\dfrac{z_1+z_2+z_3}{3}$ ◦1次結合 任意のベクトル$\vec{p}$は同一平面上にない3つのベクトル$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$を用いて$\vec{p}=l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$（1次結合）の形に表される。 1点$O$をとり，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$, $\vec{p}=\overrightarrow{OP}$とするとき，右図のように平行六面体を作れば $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP'}+\overrightarrow{P'P}$, $\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}$, $\overrightarrow{P'P}=\overrightarrow{OP_3}$ よって $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}$ ここで，$\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$, $\overrightarrow{OP_3}$はそれぞれ実数l, m, nによって$\overrightarrow{OP_1}=l\vec{a}$, $\overrightarrow{OP_2}=m\vec{b}$, $\overrightarrow{OP_3}=n\vec{c}$と表されるから $\vec{p}=l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$ 	証 〔1〕OがBと一致する場合，AOはABと一致し，$AO\perp l$, $AO\perp n$となるから，$AO\perp\alpha$ 〔2〕OがBと一致しない場合 l上にBと異なる点Cをとり， $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$とおくと $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$ $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\vec{c}-\vec{b}$ $m\perp l$より $(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$ $\therefore \vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}-\|\vec{b}\|^2=0$ …① $n\perp l$より $\vec{b}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$ $\therefore \vec{b}\cdot\vec{c}-\|\vec{b}\|^2=0$ …② ①，②より $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ $\therefore AO\perp l$ また，$AO\perp n$ したがって $AO\perp\alpha$（終）〃 	• EX 2で取り上げた問題をベクトルを用いて解く。点Oに関する位置ベクトルを定めて解法しようとする。しかし，l上にBと異なる点Cをとり補助線OCを引いて，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$にとることまで思いつかない。 • $AO\perp BO(n)$が成り立っているから，示すことはEX 1で学習した$AO\perp BC$，ベクトルでは$\overrightarrow{AO}$と$\overrightarrow{BC}$の内積$=0$であるがうまく処理できるか気がかりである。	• OがBと一致するときは自明であるから一致しないときについて，問題解決に当って，補助線を引く発想は欠かせないものとなっている。この線分OCによって点Oに関する位置ベクトル3つが揃うことになる。 • EX 1では$AO\perp l$を示すために$l\perp AO$を含む平面OABを示した。しかしベクトルでは条件， $AB\perp BC(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0)$, $OB\perp BC(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{BC}=0)$から直接に$AO\perp l$（$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$）を示すことができるよさがある。
EX18 四面体$ABCD$において， $AB^2+CD^2=AC^2+BD^2$ が成り立つならば$AD\perp BC$であることを証明せよ。 証 点Aを始点にとり，B, C, Dの任意ベクトルを定めて，条件を用いて，$\overrightarrow{AD}$と$\overrightarrow{BC}$の内積$=0$を示す。	◦点が直線，平面上にあるための条件，ある実数h, kについて 1 点Pが直線AB上にある ⇔ $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}$ 2 点Pが平面α上にある ⇔ $\overrightarrow{AP}=h\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}$ 補充1 任意の点$P(\vec{p})$，同一平面上にない4点$O, A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$とすると，$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$とただ1通りに表せる。 証 3点$O, A, B$の定める平面を$\alpha$，点$P$から$OC$に平行線を引き，平面$\alpha$との交点を$P'$とする。平面$\alpha$上で考えると，ベクトル$\overrightarrow{OP'}$は，ある実数$s, t$について$\overrightarrow{OP'}=s\vec{a}+t\vec{b}$とただ1通りに表せる。また，$\overrightarrow{PP'}\parallel\overrightarrow{OC}$であるから，ある実数$u$について$\overrightarrow{P'P}=u\vec{c}$とただ1通りに表せる。ゆえに，$\vec{p}=\overrightarrow{OP'}+\overrightarrow{P'P}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$（終）〃 	証 $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$とする。 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=\vec{d}-\vec{c}$ $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\vec{d}-\vec{b}$ $AB^2+CD^2=\|\vec{b}\|^2+\|\vec{d}-\vec{c}\|^2$ $=\|\vec{b}\|^2+\|\vec{d}\|^2-2\vec{d}\cdot\vec{c}+\|\vec{c}\|^2$ $AC^2+BD^2=\|\vec{c}\|^2+\|\vec{d}-\vec{b}\|^2$ $=\|\vec{c}\|^2+\|\vec{d}\|^2-2\vec{d}\cdot\vec{b}+\|\vec{b}\|^2$ $AB^2+CD^2=AC^2+BD^2$ であるから $\vec{d}\cdot\vec{c}=\vec{d}\cdot\vec{b}$ …① また，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\vec{c}-\vec{b}$ ゆえに，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\vec{d}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=\vec{d}\cdot\vec{c}-\vec{d}\cdot\vec{b}=0$ (∵①) ∴ $AD\perp BC$（終）〃 	• 点Aに関する位置ベクトル3つをとることや示すことは$\overrightarrow{AD}$と$\overrightarrow{BC}$の内積$=0$であることは慣れてきている。しかし，辺の長さをベクトルで表すことや内積の計算に結んで計算して条件式を簡単なベクトルの内積にまとめることはできない。	• 位置ベクトル3つを定めて，条件式に関連するベクトル$\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BD}$を位置ベクトルで表す。 $AB^2=\|\overrightarrow{AB}\|^2=\|\vec{b}\|^2$, $CD^2=\|\overrightarrow{CD}\|^2=\|\vec{d}-\vec{c}\|^2=(\vec{d}-\vec{c})\cdot(\vec{d}-\vec{c})$等を用いて条件式を簡単にすることを通して，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$を示すことができる。

指導細案(No. 5)

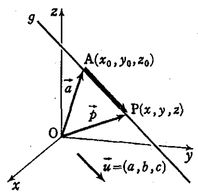
問題，解法の手順	前提内容，関連事項	解法，技能，計算技術	誤り易い箇所	指導上の留意点
EX19 四面体$OABC$において，$\triangle OAB$の重心をG_1，$\triangle OCB$の重心をG_2とするとき，$G_1G_2 /\!/ AC$であることを証明せよ。 証 重心の位置ベクトルは公式で求められる。平行条件$\overrightarrow{G_1G_2}=k\overrightarrow{AC}$($k$:実数)に着目。	◦平行条件 $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$のとき $\vec{a}/\!/\vec{b} \Leftrightarrow$ 0でない実数kについて $\vec{b}=k\vec{a}$ 内積では $\vec{a}/\!/\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert$ または $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert$ ◦重心の位置ベクトル，$A(\vec{a}), B(\vec{b}), C(\vec{c})$のとき，$\triangle ABC$の重心$G(\vec{g})$は $\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$	証 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$とすると $\overrightarrow{OG_1}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{3}$, $\overrightarrow{OG_2}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{3}$ ゆえに$\overrightarrow{G_1G_2}=\overrightarrow{OG_2}-\overrightarrow{OG_1}$ $=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{3}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{3}=\frac{\vec{c}-\vec{a}}{3}$ また$\overrightarrow{AC}=\vec{c}-\vec{a}$，よって，$\overrightarrow{G_1G_2}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ ∴$G_1G_2 /\!/ AC$ 〃 	・$G_1G_2 /\!/ AC$であることを示す方法がわからない。 ・ベクトル$\overrightarrow{AC}$の表し方がわからないために，$\overrightarrow{G_1G_2}$との関連づけができない。	・ベクトルでは平行条件である$\overrightarrow{G_1G_2}=k\overrightarrow{AC}$ (k:実数)を示す。 ・G_1G_2はそれぞれ$\triangle OAB$, $\triangle OCB$の重心であるから，3つの位置ベクトルを用いて表すことができるように$\overrightarrow{AC}$も位置ベクトルを用いて表すと関係づけられる。
EX20 四面体$OABC$において，ベクトル$\overrightarrow{OA}$と$\overrightarrow{BC}$が垂直ならば $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert^2+\lvert\overrightarrow{OC}\rvert^2=\lvert\overrightarrow{AC}\rvert^2+\lvert\overrightarrow{OB}\rvert^2$ であることを証明せよ。 証 位置ベクトルを用いて，左辺－右辺＝0を示す。垂直条件は内積＝0に着目。	◦垂直条件 $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$ ◦ベクトルの内積の性質 1 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ 2 $(m\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(m\vec{b})=m(\vec{a}\cdot\vec{b})$ m:実数 3 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$, $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ 4 $\lvert\vec{a}\rvert^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$ 5 $\lvert\vec{a}\cdot\vec{b}\rvert\leqq\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert$ ◦等式の証明 ・左辺＝右辺 ・左辺－右辺＝0	証 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$とすと $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\vec{c}-\vec{b}$ $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}$であるから，$\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$ …① $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$ $\overrightarrow{AC}=\vec{c}-\vec{a}$ このとき $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert^2+\lvert\overrightarrow{OC}\rvert^2-\lvert\overrightarrow{AC}\rvert^2-\lvert\overrightarrow{OB}\rvert^2$ $=\lvert\vec{b}-\vec{a}\rvert^2+\lvert\vec{c}\rvert^2-\lvert\vec{c}-\vec{a}\rvert^2-\lvert\vec{b}\rvert^2$ $=\lvert\vec{b}\rvert^2-2\vec{b}\cdot\vec{a}+\lvert\vec{a}\rvert^2+\lvert\vec{c}\rvert^2-(\lvert\vec{c}\rvert^2-2\vec{c}\cdot\vec{a}+\lvert\vec{a}\rvert^2)-\lvert\vec{b}\rvert^2$ $=2\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$ (∵ ①) ∴ $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert^2+\lvert\overrightarrow{OC}\rvert^2=\lvert\overrightarrow{AC}\rvert^2+\lvert\overrightarrow{OB}\rvert^2$ (終) 〃 $OA\perp BC$ 	・任意の点は，同一直線上にない3つの点の位置ベクトルを用いて表すことができることに着目し，3つの位置ベクトルを定め，与えられたベクトルを表わしたり，垂直条件を内積＝0で表示したり，長さを内積を用いて処理したりすることに慣れてきている。	・点Oに関する3つの点A, B, Cの位置ベクトルを定め，ベクトル$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$を位置ベクトルを用いて表わす。また，垂直条件$\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$を用いて，$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert^2=\lvert\vec{b}-\vec{a}\rvert^2=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=\lvert\vec{b}\rvert^2-2\vec{b}\cdot\vec{a}+\lvert\vec{a}\rvert^2$等の計算過程を通して証明すべき式の変形，右辺－左辺＝0を示す。
EX21 1辺の長さが2である正四面体$OABC$において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$とする。辺$BC$の中点を$D$とするとき，内積$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}$を求めよ。 解 中点の位置ベクトルは内分点の公式で求められる。内積の定義を適用。	◦中点の位置ベクトル，$A(\vec{a}), B(\vec{b})$のとき線分ABの中点$M(\vec{m})$は $\vec{m}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ $\triangle OAB$は正三角形 ◦正三角形上での内積の値($OA=AB=BO=2$とする) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos60^\circ$ $=2\cdot2\cdot\frac{1}{2}$ $=2$ 	解 点Dは辺BCの中点であるから $\overrightarrow{OD}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$ よって $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=\vec{a}\cdot\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)$ $=\frac{1}{2}(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c})$ 三角形はすべて正三角形であるから 各辺の長さ＝2，辺のなす角＝60° $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=2\cdot2\cos60^\circ=2$ ∴ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=2$ 〃 	・中点の位置ベクトルの表わし方，内積の計算にも慣れてきている。 ・正四面体の各面の三角形は正三角形であることに着目できていないために，内積の値は求められない。	・$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c})$から内積の計算をして，その値を求めるためには，各面は正三角形として，等辺，等角であることをとらえて，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ $=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos60^\circ=2\cdot2\cdot\frac{1}{2}=2$ $=\vec{a}\cdot\vec{c}$のように計算して，値が求められる。
EX22 四面体$OABC$がある。線分ABを2:3の比に内分する点をP，線分OPを10:1の比に外分する点をQ，線分CQを3:1の比に内分する点をRとする。三角形ARBの重心をGとするとき，$\overrightarrow{OG}$を$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$で表せ。 解 分点，重心の位置ベクトルは公式で求められることに着目。	◦線分の分点，三角形の重心 3点$A(\vec{a}), B(\vec{b}), C(\vec{c})$について，線分$AB$を$m:n$の比に分ける点を$P(\vec{p})$，線分$AB$の中点を$M(\vec{m})$，$\triangle ABC$の重心$G(\vec{g})$とすると $\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$, $\vec{m}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$, $\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ ただし，$m>0$, $n>0$のときは $m:n$の比に内分する。 m, nが異符号のときは $\lvert m\rvert:\lvert n\rvert$の比に外分する。	証 点Pは線分ABを2:3に内分する点であるから $\overrightarrow{OP}=\frac{3\vec{a}+2\vec{b}}{2+3}=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$ 点Qは線分OPを10:1の比に外分する点であるから $\overrightarrow{OQ}=\frac{10}{9}\overrightarrow{OP}=\frac{10}{9}\left(\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}\right)$ $=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}$ 点Rは線分CQを3:1の比に内分する点であるから $\overrightarrow{OR}=\frac{\overrightarrow{OC}+3\overrightarrow{OQ}}{3+1}=\frac{\vec{c}+3\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}\right)}{4}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$ $\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{OB}}{3}=\frac{\vec{a}+\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}\right)+\vec{b}}{3}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}+\frac{1}{12}\vec{c}$ 〃 	・内分点，重心の位置ベクトルの表し方には習熟してきている。しかし，外分点の位置ベクトルの表示については，もう少しあいまいな点が残る。 ・$\overrightarrow{OP}=\frac{3\vec{a}+2\vec{b}}{5}$, $\overrightarrow{OQ}=\frac{6\vec{a}+4\vec{b}}{9}$, $\overrightarrow{OR}=\frac{6\vec{a}+4\vec{b}+3\vec{c}}{12}$のように共通分母に表わして計算すると，$\overrightarrow{OG}$の計算が複雑になり，ミスをする。	・内分点としてのP, R, Gの位置ベクトルは容易に求められる。外分点Qに関して，線分OPを10:(−1)に分ける点ととらえて，$\overrightarrow{OQ}=\frac{-1\cdot\overrightarrow{OO}+10\overrightarrow{OP}}{10-1}=\frac{10}{9}\overrightarrow{OP}$とする。 ・解答のように$\overrightarrow{OP}=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$, $\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}$, $\overrightarrow{OR}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$のように，$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$についての係数を分数で表わしておくと，$\overrightarrow{OG}$の計算を易しくし，ミスも少なくなる。
EX23 四面体$ABCD$において，次の等式を満たす点Pはどのような位置にあるか $\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{CP}+6\overrightarrow{DP}=\vec{0}$ 解 点Aを始点にとり，点Pの位置ベクトルを，点B, C, Dの位置ベクトルで表し，分点の公式を適用。	種類1 四面体$ABCD$において，等式$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{DP}=\vec{0}$を満たす点$P$はどのような位置にあるか 解 点$A$に関する位置ベクトルを$B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$, $D(\vec{d})$, $P(\vec{p})$とすると，等式から $\vec{p}+(\vec{p}-\vec{b})+(\vec{p}-\vec{c})+(\vec{p}-\vec{d})=0$ ∴ $\vec{p}=\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$ $\triangle BCD$の重心をGとすると，点Pは，線分AGを3:1の比に内分する点 〃 EX23解のつづき ※ ゆえに線分BCを2:3の比に内分する点を$E(\vec{e})$，線分EDを6:5の比に内分する点を$F(\vec{f})$とすると，点Pは線分AFを11:1の比に内分する点 〃	解 点Aに関する位置ベクトルを$B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$, $D(\vec{d})$, $P(\vec{p})$とすると，等式から $\vec{p}+3(\vec{p}-\vec{b})+2(\vec{p}-\vec{c})+6(\vec{p}-\vec{d})=0$ ∴ $\vec{p}=\frac{3\vec{b}+2\vec{c}+6\vec{d}}{12}=\frac{11}{12}\cdot\frac{1}{6+5}\left(5\times\frac{3\vec{b}+2\vec{c}}{2+3}+6\vec{d}\right)$ ここで $\frac{3\vec{b}+2\vec{c}}{2+3}=\vec{e}$, $\frac{5\vec{e}+6\vec{d}}{6+5}=\vec{f}$とすると $\vec{p}=\frac{11}{12}\vec{f}$ ※ 	・原点O以外の点Aに関するベクトルを定めると計算の見通しが良くなりスムーズに計算できることを知っている。 ・$\vec{p}=\frac{3\vec{b}+2\vec{c}+6\vec{d}}{12}$から$\vec{p}$の位置はきめられない。	・点Aに関する3つの点B, C, Dの位置ベクトルを定め，点$P(\vec{p})$として，条件式を$\vec{p}$について解く。 ・$\vec{p}=\frac{11}{12}\cdot\frac{5\times\frac{3\vec{b}+2\vec{c}}{2+3}+6\vec{d}}{6+5}$, $\frac{3\vec{b}+2\vec{c}}{2+3}$ $=\vec{e}$, $\frac{5\vec{e}+6\vec{d}}{6+5}=\vec{f}$とおくと$\vec{p}=\frac{11}{12}\vec{f}$ となるから点Pはきまる。

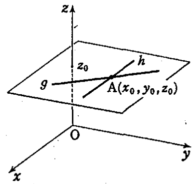
指導細案(No. 6)

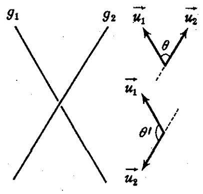
問題，解法の手順	前提内容，関連事項	解法，技能，計算技術	誤り易い箇所	指導上の留意点
EX24　空間に四面体$OABC$と点Pがある。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$とおき，$\overrightarrow{OP}=p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}$ (p, q, rは実数)とする。 (1)　点Pが$\triangle ABC$の周またはその内部にあるためのp, q, rの条件を求めよ。 (2)　点Pが四面体$OABC$の面とその内部にあるためのp, q, rの条件を求めよ。 解 (1)　点Pが$\triangle ABC$上にあるための必要十分条件は$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$となる実数$s, t$がある。特に$\triangle ABC$の周か内部にあるための必要十分条件は$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$についても$s\geqq 0$, $t\geqq 0$, $s+t\leqq 1$となる実数s, tがある。 (2)　直線OPと$\triangle ABC$の周か内部との交点をQとすると$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OQ}$ $(0\leqq k\leqq 1)$	補充2　s, tを実数，$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$とおく。$\begin{matrix} s\geqq 0, t\geqq 0 \\ s+t\leqq 1 \end{matrix}$ $\Leftrightarrow$ 点Pは$\triangle ABC$の周か内部にある。 解　$\triangle ABC$において　$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$　$s=0$, $t=0$のときは　点PはAに一致する。 kを固定して考える。$s+t=k>0$のとき $\overrightarrow{AP}=\frac{s}{k}(k\overrightarrow{AB})+\frac{t}{k}(k\overrightarrow{AC})$ $kAB=AB'$, $kAC=AC'$とすれば $\overrightarrow{AP}=\frac{s}{k}\overrightarrow{AB'}+\frac{t}{k}\overrightarrow{AC'}$ $\frac{s}{k}\geqq 0$, $\frac{t}{k}\geqq 0$, $\frac{s}{k}+\frac{t}{k}=1$  よって，点Pは線分$B'C'$上を動く。kを$0<k\leqq 1$の範囲で変化させれば線分$B'C'$は0を除いて$\triangle ABC$の内部または周を動く。 したがって，点Pの存在する範囲は$\triangle ABC$の周または内部である。 EX24の(2)　別解　四面体$OABC$の面上か内部の任意の点をPとする。 直線OPが$\triangle ABC$の周か内部と交わる点をQとし，直線AQが辺BCと交わる点をRとする。 $BR:RC=t:1-t$とすると　$\overrightarrow{OR}=(1-t)\vec{b}+t\vec{c}$ $AQ:QR=s:1-s$とすると　$\overrightarrow{OQ}=(1-s)\vec{a}+s\overrightarrow{OR}$ $=(1-s)\vec{a}+s(1-t)\vec{b}+st\vec{c}$ $\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OQ}$とすると $\overrightarrow{OP}=k(1-s)\vec{a}+ks(1-s)\vec{b}+kst\vec{c}$ $\therefore$ $p=k(1-s)$, $q=ks(1-t)$, $r=kst$ $\therefore$ $p+q+r=k(1-s+s-st+st)=k$, $0\leqq t\leqq 1$, $0\leqq s\leqq 1$, $0\leqq k\leqq 1$であるから　$p+q+r\leqq 1$, $p\geqq 0$, $q\geqq 0$, $r\geqq 0$ 〃	解 (1)　点Pが$\triangle ABC$の周か内部にあるための必要十分条件は $\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$　について $s\geqq 0$, $t\geqq 0$, $s+t\leqq 1$ …① となる実数s, tが存在することである。 よって　$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=s(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+t(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$ 整理すると　$\overrightarrow{OP}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$ ここで　$p=1-s-t$, $q=s$, $r=t$とおくと $p+q+r=1$, ①から　$p\geqq 0$, $q\geqq 0$, $r\geqq 0$ 〃  (2)　直線OPが$\triangle ABC$の周か内部と交わる点をQとすると　(1)によって　$\overrightarrow{OQ}=l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$について $l+m+n=1$, $l\geqq 0$, $m\geqq 0$, $n\geqq 0$ …① $\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OQ}$ $(0\leqq k\leqq 1$…②$)$とすると $\therefore$ $\overrightarrow{OP}=kl\vec{a}+km\vec{b}+kn\vec{c}$ ここで　$p=kl$, $q=km$, $r=kn$とおくと ①②より　$p+q+r=k(l+m+n)=k\leqq 1$ $p\geqq 0$, $q\geqq 0$, $r\geqq 0$ 〃 	・点Pが$\triangle ABC$の周またはその内部にあることをベクトルで表わすことは難しい。点Pが平面ABC上にある条件は$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$となる実数$s, t$があることである。このことを手がかりに考える。 ・$\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$のベクトルから位置ベクトルの考え方に転換する発想も難しい。 ・$\overrightarrow{OP}$を$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$で表わそうとしないために，$\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$に置換するものが見えてこない。 ・問題(2)を解くために(1)を利用しようとするがうまくいかない。直接に利用できない。	・点Aに関するベクトルを考えると，$\overrightarrow{AP}$を2つのベクトル$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$で表示する。$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$の係数をs, tとすれば，$\triangle ABC$の周か内部にあるための条件は$s\geqq 0$, $t\geqq 0$ $s+t\leqq 1$で与えられる。 ・点Oに関する3つの点の位置ベクトルが与えられているから，$\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$を位置ベクトルで表わす。 ・$\overrightarrow{OP}$を$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$で表わした式を導くと$\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$に置換するものが見えてくる。 ・直線$OP$が$\triangle ABC$の周か内部との交点を$Q$にとると，$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OQ}$ $(0\leqq k\leqq 1)$と書けて，$\overrightarrow{OQ}$について(1)を利用することができる。$\overrightarrow{OP}$を$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$で表わし，$p, q, r$に置換する。
EX25　四面体$OABC$において点Pを辺ABの中点，点Qを線分PCの中点，点Rを線分OQの中点とする。直線ARが3点O, B, Cを通る平面と交わる点をSとし，直線OSと直線BCの交点をTとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$とするとき$\overrightarrow{OS}$を$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$で表せ。 解　交点$S$は直線$AR$上にあること，平面$OBC$上にあることを位置ベクトルを用いて表し，ベクトルの相等条件に着目	 類題2　OA, OB, OCを3辺にもつ平行六面体で，Oと同一面上にない頂点をDとする。対角線ODは$\triangle ABC$どのような点を通るか。	解　P, Q, RはAB, PC, OQの中点であるから $\overrightarrow{OP}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$, $\overrightarrow{OQ}=\frac{\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\vec{c}}{2}=\frac{\vec{a}}{4}+\frac{\vec{b}}{4}+\frac{\vec{c}}{2}$ $\overrightarrow{OR}=\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{a}}{4}+\frac{\vec{b}}{4}+\frac{\vec{c}}{2}\right)=\frac{\vec{a}}{8}+\frac{\vec{b}}{8}+\frac{\vec{c}}{4}$, $s>1$として $\overrightarrow{AS}=s\overrightarrow{AR}$とすると，$\overrightarrow{OS}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OR}$ $=(1-s)\vec{a}+s\left(\frac{\vec{a}}{8}+\frac{\vec{b}}{8}+\frac{\vec{c}}{4}\right)=\left(1-\frac{7}{8}s\right)\vec{a}+\frac{s}{8}\vec{b}+\frac{s}{4}\vec{c}$  また，Sは平面OBC上にあり，$\overrightarrow{OB}\nparallel\overrightarrow{OC}$であるから $\overrightarrow{OS}=x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}=x\vec{b}+y\vec{c}$, $x\geqq 0$, $y\geqq 0$, $x+y\leqq 1$とおける。 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$は同一面上にないから $1-\frac{7}{8}s=0$, $\frac{s}{8}=x$, $\frac{s}{4}=y$　$\therefore$ $s=\frac{8}{7}$, $x=\frac{1}{7}$, $y=\frac{2}{7}$ ゆえに　$\overrightarrow{OS}=\frac{1}{7}\vec{b}+\frac{2}{7}\vec{c}$ 〃	・中点の位置ベクトルの表し方は抵抗がなくなってきている。 ここでも$\overrightarrow{OQ}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}}{4}$, $\overrightarrow{OR}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}}{8}$のように共通分母で表して計算すると，$\overrightarrow{OS}$の計算が複雑になり，ミスをする。 ・$S$は直線$AR$と$\triangle OBC$の交点であるから〔1〕$S$は直線$AR$上にある。〔2〕$S$は平面$OBC$上にある。これらのことより$\overrightarrow{OS}$を2通りに表すことはわかる。(1)は慣れているが，(2)は不慣れである。 ・$\overrightarrow{OS}$がただ1通りに書き表されることに気がつかないために求められない。	・解答のように$\overrightarrow{OQ}=\frac{\vec{a}}{4}+\frac{\vec{b}}{4}+\frac{\vec{c}}{2}$, $\overrightarrow{OR}=\frac{\vec{a}}{8}+\frac{\vec{b}}{8}+\frac{\vec{c}}{4}$のように，$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$についての係数を分数で表わしておくと$\overrightarrow{OS}$の計算をし易く，ミスも少なくなる。 ・〔1〕$\overrightarrow{AS}=s\overrightarrow{AR}$とすると，$\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OA}=s(\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OA})$　$\therefore \overrightarrow{OS}=(1-s)\vec{a}+s\overrightarrow{OR}$, $s>1$ ・〔2〕$\overrightarrow{OS}=x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}=x\vec{b}+y\vec{c}$　$x\geqq 0$, $y\geqq 0$, $x+y\leqq 1$と表すことができる。 ・2通りに表わされた$\overrightarrow{OS}$はただ1通りに表されるからベクトルの相等条件を用いて解く。
EX26　四面体$ABCD$において，辺ABを3:1の比に内分する点をP，辺ACの中点をQ，辺ADを2:1に内分する点をRとし，$\triangle BCD$の重心をGとする。$\triangle PQR$と直線AGが交わる点Tとするとき，$\overrightarrow{AT}$を$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$を用いて表せ。 解　点$A$を始点にとり，$B, C, D$の位置ベクトルを定めて交点$T$が直線$AG$上にあること，$\triangle BCD$の内部にあることを位置ベクトルを用いて表し，ベクトルの相等条件に着目	解　点Oに関する位置ベクトルを$A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$，対角線ODと$\triangle ABC$との交点をPとすると， O, P, Dは1直線上にあるから， $\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OD}=k(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ $=k(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ …①  Pは平面ABC上にあり，$\overrightarrow{AB}\nparallel\overrightarrow{AC}$であるから　$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$とおける。 $\therefore$ $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=s(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+t(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$ $\overrightarrow{OP}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\overrightarrow{OC}$ …② $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$は，同一平面上にないから，①，②より　$k=1-s-t$, $k=s$, $k=t$ これを解いて　$k=s=t=\frac{1}{3}$ $\therefore$ $\overrightarrow{OP}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ したがって，交点Pは$\triangle ABC$の重心 〃	解　$\overrightarrow{AB}=12\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=12\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=12\vec{d}$とおくと $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}=9\vec{b}$, $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=6\vec{c}$, $\overrightarrow{AR}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=8\vec{d}$, $\overrightarrow{AG}=\frac{12\vec{b}+12\vec{c}+12\vec{d}}{3}=4\vec{b}+4\vec{c}+4\vec{d}$  点Tは線分AG上にあるから，$0<k<1$として $\overrightarrow{AT}=k\overrightarrow{AG}=4k\vec{b}+4k\vec{c}+4k\vec{d}$ …① また，Tは$\triangle PQR$の内部にあるから $\overrightarrow{AT}=r\overrightarrow{AP}+s\overrightarrow{AQ}+t\overrightarrow{AR}$ $=9r\vec{b}+6s\vec{c}+8t\vec{b}$ …② このとき$r+s+t=1$, $r>0$, $s>0$, $t>0$ …③ $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$は同一平面上にないから，①，②により $9r=4k$, $6s=4k$, $8t=4k$　$\therefore$ $r=\frac{4}{9}k$, $s=\frac{2}{3}k$, $t=\frac{1}{2}k$ ③より　$\frac{4}{9}k+\frac{2}{3}k+\frac{1}{2}k=1$，　$k>0$　$\therefore$ $k=\frac{18}{29}$ ①より　$\overrightarrow{AT}=\frac{18}{29}\overrightarrow{AG}$,　$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$であるから， $\overrightarrow{AT}=\frac{6}{29}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$ 〃	・点Aに関する点B, C, Dの位置ベクトルをとることに習熟してきている。しかし，$\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$に定めると計算が分数になりミスし易い。 ・EX25と同様であるが，Tは直線AGと$\triangle PQR$の交点で 〔1〕Tは線分AG上にある。 〔2〕Tは平面PQR上にある。 $\overrightarrow{OS}$を2通りに表すことに慣れてきている。 ・$\overrightarrow{OS}$がただ1通りに表されることに着目できるようにならないと解けない。	・$\overrightarrow{AB}=12\vec{a}$のように計算がスムーズにできるように定める。(12の選び方は3+1=4，中点2，2+1=3の最小公倍数) ・〔1〕$\overrightarrow{AT}=k\overrightarrow{AG}$ $(0<k<1)$ $=4k\vec{b}+4k\vec{c}+4k\vec{d}$ 〔2〕$\overrightarrow{AT}=r\overrightarrow{AP}+s\overrightarrow{AQ}+t\overrightarrow{AR}$ $=9r\vec{b}+6s\vec{c}+8t\vec{d}$ $r+s+t=1$, $r>0$, $s>0$, $t>0$と表すことができる。 ・ベクトルの相等条件，$r+s+t=1$を用いて解く。

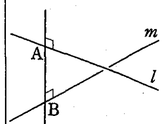
指導細案(No.7)

問題，解法の手順	前提内容，関連事項	解法，技能，計算技術	誤り易い箇所	指導上の留意点
EX27 2点$A(1,-4,3)$, $B(4,2,1)$を通る直線をlとする。次の問いに答えよ。 (1) 直線lの方向ベクトル$\vec{u}=\overrightarrow{AB}$と媒介変数方程式を求めよ。 (2) 直線$l$の方程式を分数式で表示せよ。 (3) 直線$l$上で$x$座標が3である点$C$を求めよ。 解 (1) ベクトル$\overrightarrow{AB}$の成分は終点$B$と始点$A$の座標の差で表示後ベクトル方程式の公式を適用 (2) 媒介変数tを消去 (3) ベクトル方程式に$x=3$の値を代入し，t，順にy, zを定める。	◦直線の方程式：ベクトル方程式 定点$A(x_0,y_0,z_0)$を通り，ベクトル$\vec{u}=(a,b,c)(\neq\vec{0})$に平行な直線$g$の方程式を求めると 直線$g$上の任意の点$P(x,y,z)$をとる。 $\overrightarrow{AP}\parallel\vec{u}$であるから $\overrightarrow{AP}=t\vec{u}$ (t:実数) $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$ $\vec{p}=\overrightarrow{OP}$, $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$とおくと $\vec{p}=\vec{a}+t\vec{u}$ …① 成分で表すと $\vec{p}=(x,y,z)$, $\vec{a}=(x_0,y_0,z_0)$, $\vec{u}=(a,b,c)$であるから，①より $(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+t(a,b,c)=(x_0+at,\ y_0+bt,\ z_0+ct)$ よって $x=x_0+at$, $y=y_0+bt$, $z=z_0+ct$ …② • $abc\neq0$であるときは，②からtを消去して $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ ①をベクトル方程式，②を媒介変数方程式，$\vec{u}=(a,b,c)$を方向ベクトルという。	解 (1) $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(4,2,1)-(1,-4,3)=(3,6,-2)$であるから $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$とすると，ベクトル方程式 $\vec{p}=\vec{a}+t\vec{u}$ …①に成分，$\vec{P}=(x,y,z)$ $\vec{a}=(1,-4,3)$, $\vec{u}=(3,6,-2)$を代入して $(x,y)=(1,-4,3)+t(3,6,-2)$ ∴ $x=1+3t$, $y=-4+6t$, $z=3-2t$ …② 〃 (2) ②をtについて解いて $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+4}{6}=\dfrac{z-3}{-2}$ 〃 $(=t)$ これは点$A(1,-4,3)$を通り，方向ベクトル $\vec{u}=(3,6,-2)$の直線の方程式である。 (3) ②の第1式で$x=3$とおくと， $3=1+3t$ ∴ $t=\dfrac{2}{3}$ …② ③を第2，第3式に代入して， $y=-4+6\cdot\dfrac{2}{3}=0$ $z=3-2\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{3}$ よって 点Cは $C\left(3,0,\dfrac{5}{3}\right)$ 〃	• 方向ベクトル$\vec{u}=\overrightarrow{AB}$は容易に求められる。しかし，直線$l$は2点$A$, Bを通る直線として公式があることを利用しようとする。問題を(1)で方向ベクトルを求めさせる意図が見抜けない。また，媒介変数方程式も直接求めようとするとミスをする。 • 直線の方程式は連比で与えられるが，公式に不慣れである。 • 連比の直線の方程式から，y, zを求めようとするとミスが出る。	• 直線lを，点$A(1,-4,3)$を通り，方向ベクトル$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(3,6,-2)$の直線の方程式を求める問題に帰着できる。また，ベクトル方程式を見出して後，成分表示して，ベクトルの相等条件を用いて求めると確実である。 • 媒介変数方程式を導いて後，tを消去して求める。慣れてくれば連比の公式を適用する。 • 媒介変数方程式から$x=3$のときのtの値を求めて後，y, zの値を求めるとスムーズにいく。
EX28 次の方程式はどのような直線を表わすか (1) 連立方程式 $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{z+1}{-3}$, $y=4$ (2) 連立方程式 $x=3$, $y=2$ 解 連比で分子$=0$のとき，分母$=0$と考える (1) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-4}{0}=\dfrac{z+1}{-3}$ (2) $\dfrac{x-3}{0}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z}{1}$	• $abc=0$の場合 (1) $c=0$のとき $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}$, $z=z_0$ 点(x_0,y_0,z_0)を通り，方向ベクトル$\vec{u}=(a,b,0)$に平行な直線g, xy平面に平行，z軸に垂直な直線g (2) $b=c=0$のとき $y=y_0$, $z=z_0$ 点(x_0,y_0,z_0)を通り，方向ベクトル$\vec{u}=(a,0,0)$に平行な直線h, yz平面に垂直，x軸に平行な直線h	解 (1) zx平面に平行な平面 $y=4$ …①上にある。$\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{z+1}{-3}$ …② ①，②から点$(2,4,-1)$を通り，方向ベクトル$\vec{u}=(2,0,-3)$に平行な直線，zx平面に平行，y軸に垂直 〃 (2) yz平面に平行な平面 $x=3$ …①上にあり，zx平面に平行な平面 $y=2$ …②上にあるから ①と②の交わりである交線である。点$(3,2,0)$を通り，方向ベクトル $\vec{u}=(0,0,1)$に平行な直線，xy平面に垂直，z軸に平行 〃	• 問題(1)，(2)ともこのままの形では，定点や方向ベクトルが見出せない。しかし，どのように変形したり，表したりすればよいかわからない。	• 方法は2つある。〔1〕 媒介変数tを用いる方法，連比の値をtとおくと (1) $x=2t+2$, $y=4$, $z=-3t-1$ (2) $x=3$, $y=2$, $z=t$ 〔2〕 連比を用いて 分母$=0$のとき 分子$=0$と見る方法 (1) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-4}{0}=\dfrac{z+1}{-3}$ (2) $\dfrac{x-3}{0}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-0}{1}$
EX29 2直線$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{5}$, $x-2=\dfrac{3-y}{7}=\dfrac{1-z}{10}$のなす角$\theta$を求めよ。ただし，$0^\circ\leqq\theta\leqq90^\circ$とする。 解 2直線の方向ベクトル$\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$のなす角αを内積の定義から求めると$\theta=\alpha$または$180^\circ-\alpha$に着目	• 2点$A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ (ただし，$x_2\neq x_1$, $y_2\neq y_1$, $z_2\neq z_1$)を通る直線の方程式 方向ベクトル $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2,y_2,z_2)-(x_1,y_1,z_1)=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ ところで，直線は点$A(x_1,y_1,z_1)$を通るから $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ • 2直線のなす角 2直線g_1, g_2のなす角を求めるにはg_1, g_2の方向ベクトル$\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$のなす角を求めればよい。 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$の向きのとり方によって，g_1, g_2のなす角は，一般に2つ得る。それらの和は180°である。 方向ベクトル$\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$のなす角をα，2直線g_1, g_2のなす角をθとすると $\theta=\alpha$または$180^\circ-\alpha$	解 各直線の方向ベクトル $\vec{u_1}=(3,4,5)$と$\vec{u_2}=(1,-7,-10)$について $\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}=3\cdot1+4\cdot(-7)+5\cdot(-10)=-75$, $\lvert\vec{u_1}\rvert=\sqrt{3^2+4^2+5^2}=5\sqrt{2}$, $\lvert\vec{u_2}\rvert=\sqrt{1^2+(-7)^2+(-10)^2}=5\sqrt{6}$ $\vec{u_1}$と$\vec{u_2}$のなす角をαとすると $\cos\alpha=\dfrac{\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}}{\lvert\vec{u_1}\rvert\lvert\vec{u_2}\rvert}=\dfrac{-75}{50\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $0\leqq\alpha\leqq180^\circ$であるから $\alpha=150^\circ$, $0^\circ\leqq\theta\leqq90^\circ$であるから $\theta=180^\circ-\alpha=30^\circ$ 〃	• 2直線のなす角θはそれぞれ2つの方向ベクトルのなす角αで与えられるが，$\theta=\alpha$であると結論づけてしまう。 • 内積の定義のままで成分表示による計算を行ってミスをする。	• $0^\circ\leqq\alpha\leqq180^\circ$であるが，$0^\circ\leqq\theta\leqq90^\circ$であるから，〔1〕 $\cos\alpha>0$のときは$\theta=\alpha$ 〔2〕 $\cos\alpha<0$のときは$\theta=180^\circ-\alpha$で与えられる。 • 求めるもの，$\cos\alpha$について解いた式に計算済の内積，大きさの値を代入する。
EX30 点$(1,2,-1)$を通り，2つのベクトル $\vec{p}=(1,1,1)$, $\vec{q}=(-2,-1,3)$に垂直な直線の方程式を求めよ。 解 直線の方向ベクトルは2つのベクトルに垂直条件からきまる。	• 2直線の垂直条件 2直線g_1, g_2が垂直であるときは2直線の方向ベクトル$\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$が垂直である。 $g_1\perp g_2 \Leftrightarrow \vec{u_1}\cdot\vec{u_2}=0$	解 求める直線の方向ベクトルを$\vec{u}=(a,b,c)$とすると $\vec{p}\cdot\vec{u}=0$, $\vec{q}\cdot\vec{u}=0$であるから， $a+b+c=0$ …① ⋮ ①＋② $-a+4c=0$ ∴ $a=4c$ …③ $-2a-b+3c=0$ …② ⋮ ③を①に代入して ∴ $b=-5c$ ∴ $a:b:c=4:(-5):1$ $c=1$とおくと $a=4$, $b=-5$であるから $\vec{u}=(4,-5,1)$，ところで，直線は点$(1,2,-1)$を通るから，公式より，求める直線の方程式は $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{-5}=z+1$ 〃	• 垂直条件から2式を立式するが解けない。 • a, bをcで表わしたとき連比しか求まらないので$\vec{u}$をきめられない。	• 3変数で2式の場合は解は不定か不能である。1変数cを定数と見て，a, bについて解くことができる。 • $c=1$として，$\vec{u}$をなるべく簡単に表せるものを選ぶ。
EX31 (1) 次の2直線は交わることを示し，交点Pの座標を求めよ。 $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+3}{-1}$, $\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y+7}{5}=\dfrac{z+4}{3}$ (2) 次の2直線の両方に直交する直線の方程式を求めよ。 $x-1=y-2=z$, $x-2=\dfrac{y+5}{2}=3-z$ 解 媒介変数方程式により表示する。 (1) 媒介変数である実数s, tの存在及び交点に着目 (2) 求める直線の方向ベクトルは既存の2直線の交点を結ぶ線分のベクトル，また，垂直条件に着目	EX31の(1) 別解 $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+3}{-1}=s$とおくと $x=5+2s$, $y=2+2s$, $z=-3-s$ ∴ $P(5+2s,\ 2+2s,\ -3-s)$ …① これを第2の直線の式に代入して，$\dfrac{8+2s}{4}=\dfrac{9+2s}{5}=\dfrac{1-s}{3}$ 最初の等式をsについて解けば $s=-2$ …② これは第2の等式を満たす。ゆえに2直線は交わる。 ②を①に代入して $P(1,-2,-1)$ 〃	解 第1，2の直線をそれぞれl, mとする。 (1) $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+3}{-1}=s$, $\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y+7}{5}=\dfrac{z+4}{3}=t$ とおくと ∴ $\begin{cases}x=5+2s\\y=2+2s\\z=-3-s,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-3+4t\\y=-7+5t\\z=-4+3t\end{cases}$ 2直線l, mが交わるためには，3つの等式 $\begin{cases}5+2s=-3+4t & \cdots①\\2+2s=-7+5t & \cdots②\\-3-s=-4+3t & \cdots③\end{cases}$ を同時に成立させる実数s, tが存在 ①，②より$s=-2$, $t=1$ …④，これは③を満たす。ゆえに，l, mは交わる。④のとき①，②，③の両辺は$1,-2,-1$となるから ∴ $p(1,-2,1)$ 〃 (2) 求める直線とl, mとの交点をそれぞれA, Bとする。媒介変数s, tを用いて，$A(1+s,\ 2+s,\ s)$, $B(2+t,\ -5+2t,\ 3-t)$と表される。 よって $\overrightarrow{AB}=(1-s+t,\ -7-s+2t,\ 3-s-t)$, $\overrightarrow{AB}$は，l, mの方向ベクトル$(1,1,1)$, $(1,2,-1)$と直交するから， $\begin{cases}(1-s+t)\cdot1+(-7-s+2t)\cdot1+(3-s-t)\cdot1=0\\(1-s+t)\cdot1+(-7-s+2t)\cdot2+(3-s-t)\cdot(-1)=0\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}-3-3s+2t=0\\-8-s+3t=0\end{cases}$ これを解いて $s=1$, $t=3$ よって $A(2,3,1)$, $B(5,1,0)$, $\overrightarrow{AB}=(3,-2,-1)$ ゆえに，求めるABの方程式は $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$ 〃	• 2つの与えられた連比そのままの形から交点Pの座標を求める方法が見出せない。 • 問題(2)では求める直線の方向ベクトルを$\vec{u}=(a,b,c)$とおいて，与えられた2直線との垂直条件から求めようとするが，直線が通る定点が定まっていないので求められない。	• 方法は2つある。 〔1〕 2つの連比の値をそれぞれs, tとおいて，x, y, z座標について解いておく。交点Pではx, y, z座標が一致するから3つの等式が成り立つ，これを解いて求める。 〔2〕 1方の連比の値をsとおいて，交点Aのx, y, z座標について解いておく。交点Bのx, y, z座標は他方の連比を満たしていることを利用して求める。 • 問題(1)の解法〔1〕をまねて，2つの直線との交点をA, Bとして，座標をs, tで表す。求める直線の方向ベクトルが$\overrightarrow{AB}$，これと2直線との垂直条件から求める。

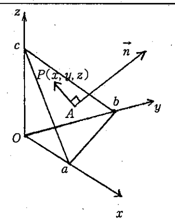
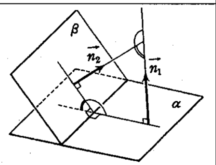
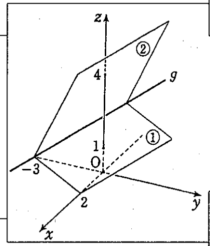




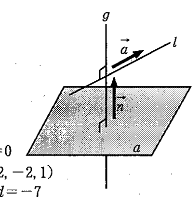
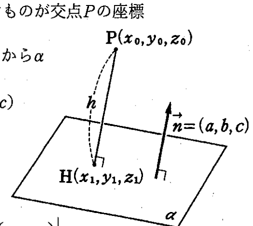
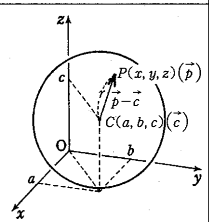
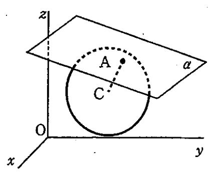
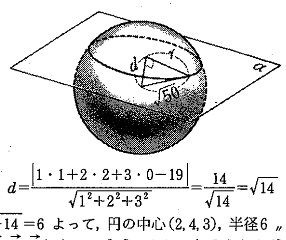




指導細案(No.8)

問題，解法の手順	前提内容，関連事項	解法，技能，計算技術	誤り易い箇所	指導上の留意点
EX32 次の平面の方程式を求めよ。 (1) 点$A(3,-1,2)$を通り，法線ベクトルは$\vec{n}=(2,3,1)$である。 (2) 2点$A(2,1,4)$，$B(5,3,5)$に対して，点Aを通り直線ABを法線とする平面の方程式を求めよ。 解 (1) 点と法線ベクトルで平面の方程式がきまる。 (2) 法線ベクトル$\overrightarrow{AB}$の成分は終点Bと始点Aの座標の差で表示	◦平面の方程式：ベクトル方程式 1点$A(x_0,y_0,z_0)$を通り，ベクトル$\vec{n}=(a,b,c)\neq\vec{0}$に垂直な平面の方程式を求めると， 点$P(x,y,z)$が平面$\alpha$上にある条件は　$\overrightarrow{AP}=\vec{0}$，または$\overrightarrow{AP}\perp\vec{n}$ まとめて　$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0$，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OP}=\vec{P}$とおくと $\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$ …① 成分で表示する　$\vec{p}-\vec{a}=(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)$であるから $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ …② ②で　$d=-(ax_0+by_0+cz_0)$とおくと 平面はx,y,zの1次方程式　$ax+by+cz+d=0$で表される。  	解 (1) 公式により，求める平面の方程式は $2(x-3)+3(y+1)+(z-2)=0$ 整理すると　$2x+3y+z-5=0$ 〃 (2) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(5,3,5)-(2,1,4)=(3,2,1)$ 公式により，求める平面の方程式は $3(x-2)+2(y-1)+(z-4)=0$ 整理すると　$3x+2y+z-12=0$ 〃	・平面の方程式の公式に不慣れである。 ・法線ベクトル$\overrightarrow{AB}$は容易に求められる。点$A(2,1,4)$を通り，法線ベクトル$\overrightarrow{AB}$の平面の方程式を公式によって求めようとする。	・法線ベクトル$\vec{n}$のベクトル方程式を導いて後，成分表示して求める。慣れてくれば直接公式を適用する。 ・ここでも法線ベクトル$\overrightarrow{AB}=\vec{n}$とおいて，ベクトル方程式を導いて後，成分表示して求めると確実である。公式の使い方も徐々に上手になってくる。 ・求める方程式を$ax+by+cz+d=0$としても求められる。
EX33 3点$A(5,4,0)$，$B(0,5,3)$ $C(4,0,2)$を通る平面の方程式を求めよ。 解 平面はx,y,zの1次方程式で表示できる。3点を通ることに着目して，連立方程式を立式して解く。	◦法線ベクトル 平面の垂線を法線ともいい，平面に垂直なベクトルをその平面の法線ベクトルという。 平面　$ax+by+cz+d=0$の法線ベクトルは$\vec{n}=(a,b,c)$である。 ・1点$A(p,q,r)$を通る平面：$ax+by+cz+d=0$が満たす式について 点$A(p,q,r)$は平面：$ax+by+cz+d=0$ …①上にある。したがって， $x=p$，$y=q$，$z=r$は$ax+by+cz+d=0$を満たすから$ap+bq+cr+d=0$	解 求める方程式を　$ax+by+cz+d=0$ …①とする。 点A，B，Cの座標をこの方程式①に代入して $5a+4b+d=0$ …② $5b+3c+d=0$ …③ $4a+2c+d=0$ …④ ③×2−④×3　$-12a+10b-d=0$ …⑤ ②×10−⑤×4　$98a+14d=0$　∴ $d=-7a$ …⑥ ②，④，⑥より　$b=\frac{1}{2}a$，$c=\frac{3}{2}a$　∴ $a:b:c:d=2:1:3:(-14)$ $a=2$とおくと　$b=1$，$c=3$，$d=-14$であるから，これらを①に代入する。 したがって，求める平面の方程式は　$2x+y+3z-14=0$ 〃	・法線ベクトルは与えられていないし，また，求めようとしても求められないので，法線ベクトルによる平面の方程式を求める方法は用いられない。 ・3式を立式するが解けない。 ・b，c，dをaで表したとき，連比しか求まらないので平面をきめられない。	・平面の方程式を$f(x,y,z)=ax+by+cz+d=0$とおく。 点(x_1,y_1,z_1)が平面$f(x,y,z)=0$上にある。⇔$f(x_1,y_1,z_1)=0$を利用して，1直線上にない3点を通ることにより，1つの平面が定まる。 ・1変数aを定数と見て，b，c，dについて解くことができる。 ・$a=2$として，平面の方程式をなるべく簡単な整数係数になるようにとる。
EX34 2平面 $2x-2y=-1$，$x-3y+\sqrt{6}z=1$のなす角θを求めよ。ただし，$0^\circ\leqq\theta\leqq90^\circ$とする。 解 2つの平面の法線ベクトルのなす角$\alpha$を求める。内積の定義を適用，$\theta=\alpha$または$\theta=180^\circ-\alpha$	◦2つの平面のなす角 $\alpha:a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ $\beta:a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ α，βのなす角は，α，βの法線ベクトル $\vec{n_1}=(a_1,b_1,c_1)$，$\vec{n_2}=(a_2,b_2,c_2)$ のなす角を求めればよい。法線ベクトルのなす角をα，2平面α，βのなす角をθとすると　$\theta=\alpha$，または$180^\circ-\alpha$  	解 各平面の法線ベクトル　$\vec{n_1}=(2,-2,0)$，$\vec{n_2}=(1,-3,\sqrt{6})$について $\vec{n_1}$と$\vec{n_2}$のなす角をαとすると $\cos\alpha=\frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{\|\vec{n_1}\|\|\vec{n_2}\|}=\frac{2\times1+(-2)\times(-3)+0\times\sqrt{6}}{\sqrt{2^2+(-2)^2+0^2}\ \sqrt{1^2+(-3)^2+(\sqrt{6})^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $0^\circ\leqq\alpha\leqq180^\circ$であるから　$\alpha=45^\circ$ 求めるθは　αまたは$180^\circ-\alpha$であるから $0^\circ\leqq\theta\leqq90^\circ$より　$\theta=45^\circ$ 〃	・2平面のなす角θはそれぞれ2つの法線ベクトルのなす角αで与えられるが，2直線のなす角と同様に吟味なしに$\theta=\alpha$であると結論づける。 ・2直線のなす角で求めた方法，内積の定義を$\cos\alpha$について解いた式を成分表示して求める。	・2直線のなす角と同様である。 (1) $\cos\alpha>0$のときは$\theta=\alpha$ (2) $\cos\alpha<0$のときは$\theta=180^\circ-\alpha$で与えられる。この問題では$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}>0$であるから$\theta=\alpha$である。 ・$\cos\alpha=\frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{\|\vec{n_1}\|\|\vec{n_2}\|}$を一度に計算するとミスが多くなるときは，予め　$\|\vec{n_1}\|\|\vec{n_2}\|$，$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}$を求めておく。
EX35 2平面$3x-2y+6z-6=0$，$3x+4y-3z+12=0$の交線の方程式を連比の形で表せ。 解 両式に共に含まれる一文字zを，yを消去してxで表し，また，xを消去してyで表し，等式を作る。	◦平行でない2平面の交わり 2平面　$\alpha:a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ …① $\beta:a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ …② x消去，y消去した式からそれぞれzをyで，xで表して等式を作る。…③　③を満たすx,y,zの値はすべて①，②，を満足するから　③は2平面①，②の交線gを表す。よって連立方程式①，②は直線gを表す。  	解 $3x-2y+6z-6=0$ …①　$3x+4y-3z+12=0$ …② ①，②からxを消去すると　②−①より　$6y-9z+18=0$ …①′ ①，②からyを消去すると　①×2+②　$9x+9z=0$ …②′ ①′，②′からzについて解くと　$z=\frac{2(y+3)}{3}$，$z=-x$　∴ $-x=z=\frac{2(y+3)}{3}$ したがって　$\frac{x}{-2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z}{2}$ …③ ③を満たすx，y，zの値は，すべて①，②をともに満たす。③は2平面①，②の交線 〃	・交線を求める方法が思いつかない。 2つの平面の方程式をどのように変形して，交線を求めたらよいのか見当がつない。	・①，②の法線ベクトルは$\vec{n_1}=(3,-2,6)$，$\vec{n_2}=(3,4,-3)$であるから　$\vec{n_1}\not\parallel\vec{n_2}$，したがって①，②は交わり，①，②の交線は存在する。解答の①′，②′は①，②の交線を通り，それぞれx軸，y軸に平行な平面を表す。これらより得た③は2平面①，②の交線の方程式を表す。
EX36 平面$\alpha:3x-4y+z=0$に対して次の平面の方程式を求めよ。 (1) 点$A(5,2,1)$を通り平面αに平行な平面β (2) 点$B(2,-4,3)$，$C(-1,3,8)$を通り，平面αに垂直な平面γ 解 (1) $\alpha\parallel\beta$よりαの法線ベクトルがβの法線ベクトルに着目 (2) 法線ベクトルを(a,b,c)とする平面γはx，y，zの1次式，2点を通ること，垂直条件に着目	◦2平面の平行・垂直 2平面　$\alpha:a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$　法線ベクトル$\vec{n_1}=(a_1,b_1,c_1)$ $\beta:a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$　法線ベクトル$\vec{n_2}=(a_2,b_2,c_2)$ $\alpha\parallel\beta\Leftrightarrow\vec{n_1}\parallel\vec{n_2}\Leftrightarrow a_1:b_1:c_1=a_2:b_2:c_2\ \left(\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\right)$ $\alpha\perp\beta\Leftrightarrow\vec{n_1}\perp\vec{n_2}\Leftrightarrow\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$ ◦直線と平面（空間）の平行・垂直 直線lと平面αが交わるか交わらないかの場合がある。交わらないとき，直線lと平面αは平行であるといい，$l\parallel\alpha$と書く。 直線lが平面αに平行(垂直)であれば，直線lの方向ベクトル$\vec{u}$と平面αの法線ベクトル$\vec{n}$と垂直(平行)である。 $l\parallel\alpha\Leftrightarrow\vec{u}\perp\vec{n}$ $l\perp\alpha\Leftrightarrow\vec{u}\parallel\vec{n}$	解 (1) $\alpha\parallel\beta$であるから，βの方程式を$3x-4y+z+d=0$ …①とおく。 点$A(5,2,1)$を通るから　$3\cdot5-4\cdot2+1+d=0$　∴$d=-8$ …② ②を①に代入して　$3x-4y+z-8=0$ (2) γの方程式を　$ax+by+cz+d=0$ …①とする。法線ベクトルは(a,b,c)　$\gamma\perp\alpha$より $3a-4b+c=0$ …② 点B，Cを通るから $2a-4b+3c+d=0$ …③ $-a+3b+8c+d=0$ …④ a,b,cの連立1次方程式と見る。 ②×2−③×3　$4b-7c-3d=0$ …⑤ ③+④×2　$2b+19c+3d=0$ …⑥ ⑤−⑥×2　$-45c-9d=0$　∴ $c=-\frac{d}{5}$ …⑦ ②，⑥，⑦より　$b=\frac{2}{5}d$，$a=\frac{3}{5}d$ ∴ $a:b:c:d=3:2:(-1):5$　$d=5$とおくと，$a=3$，$b=2$，$c=-1$であるから これらを①に代入する。したがって　求める平面の方程式は　$3x+2y-z+5=0$ 〃	・$\alpha\parallel\beta$であるからβの法線ベクトルはαの法線ベクトル$\vec{n}=(3,-4,1)$に等しいことに着目して解こうとする。 ・問題(2)　求める平面の法線ベクトルを未知数を用いて表示しただけでは求められない。 2点B，Cを通る条件を用いることができない。	・βの法線ベクトルが$\vec{n}=(3,-4,1)$にさだまったとき。 (1) βの方程式を$3x-4y+z+d=0$とおいて，点$A(3,5,1)$を通る条件からdを定めて，求める。 (2) 点$A(3,5,1)$を通り，法線ベクトルが$\vec{n}=(3,-4,1)$の平面を公式から求める。 ・2点を通る条件が与えられているので求める平面をx，y，zの1次式$ax+by+cz+d=0$とおく。
EX37 点$A(-7,2,4)$を通り，直線$l:\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+2}{5}$に垂直な平面の方程式を求めよ。		解 直線lの方向ベクトルを$\vec{n}$とすると，$\vec{n}=(2,3,5)$，$\vec{n}$はこの平面の法線ベクトルである。 この平面は　点$A(-7,2,4)$を通るから　公式により，求める平面の方程式は $2(x+7)+3(y-2)+5(z-4)=0$　∴ $2x+3y+5z-12=0$ 〃	・求める平面をαとすると，$\alpha\perp l$，これをベクトルの関係でとらえられない。	・$\alpha\perp l$であるから，lの方向ベクトルがαの法線ベクトルであるととらえて，しかも，点$A(-7,2,4)$を通ることより，公式を用いてαの方程式を求める。

指導細案(No. 9)

問題，解法の手順	前提内容，関連事項	解法，技能，計算技術	誤り易い箇所	指導上の留意点
EX38　2点$A(2,-3,5)$を通る，次の2つの直線g, lに平行な平面αの方程式を求めよ。 $g:\frac{x+3}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+7}{4}$ $l:\frac{x+1}{-2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z+2}{2}$ 解　αの法線ベクトルを$\vec{n}$, g, lの法線ベクトルを$\vec{a}$, $\vec{b}$とすると$\vec{n}$と$\vec{a}$, $\vec{b}$は垂直条件から$\vec{n}$はきまる。	◦直線lと平面αの平行・垂直 $l:\frac{x-x_0}{u}=\frac{y-y_0}{v}=\frac{z-z_0}{w}$の方向ベクトル　$\vec{u}=(u, v, w)$ $l:ax+by+cz+d=0$の法線ベクトル　$\vec{n}=(a, b, c)$ $l \parallel \alpha \Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{n} \Leftrightarrow au+bv+cw=0$ $l\perp\alpha \Leftrightarrow \vec{u}\parallel\vec{n} \Leftrightarrow \frac{a}{u}=\frac{b}{v}=\frac{c}{w}$  EX38の別解　求める平面αの方程式を　$ax+by+cz+d=0$とおく法線ベクトル$\vec{n}=(a, b, c)$から解のように$\vec{n}=(-2,-2,1)$を決定，$-2x-2y+z+d=0$が$A(2,-3,5)$を通る∴ $d=-7$ よって，$2x+2y-z+7=0$	解　平面αの法線ベクトルを$\vec{n}=(a, b, c)$とする。直線g, lの方向ベクトルを$\vec{a}$, $\vec{b}$とすると　$\vec{a}=(3,-1,4)$, $\vec{b}=(-2,3,2)$, $g\parallel\alpha$, $l\parallel\alpha$であるから， $\vec{a}\cdot\vec{n}=0$, $\vec{b}\cdot\vec{n}=0$ $\therefore \begin{cases}3a-b+4c=0 & \cdots① \\ -2a+3b+2c=0 & \cdots②\end{cases}$　①×3+②より　$7a+14c=0$　∴ $a=-2c$ ①×2+②×3より　$7b+14c=0$　∴ $b=-2c$ ∴ $a:b:c=-2:(-2):1$ ここで　$c=1$とすると　$a=b=-2$であるから　$\vec{n}=(-2,-2,1)$，ところが，平面αは点$A(2,-3,5)$を通るから，公式により　求める平面αの方程式は $-2(x-2)-2(y+3)+(z-5)=0$　∴ $2x+2y-z+7=0$ 〃	・求める平面αの方程式を$ax+by+cz+d=0$とおく。法線ベクトルを$\vec{n}$とすると$\vec{n}=(a, b, c)$に着目して解こうとする。 ・法線ベクトル$\vec{n}$をなるべく簡単に表せるものとして$c=1$と定める。	・解法が2つある。 〔1〕求める平面αの法線ベクトルを$\vec{n}=(a, b, c)$とおいて，$g\parallel\alpha$, $l\parallel\alpha$の2つの条件からa, b, cが定まる。点$A(2,-3,5)$を通ることより公式を用いて求める。 〔2〕求める平面αの方程式を$ax+by+cz+d=0$とおくと法線ベクトルは$\vec{n}=(a, b, c)$，2つの直線との平行条件，点Aを通ることよりαを求める。
EX39　直線$\frac{x}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+1}{-1}$と平面$3x+4y-z+21=0$の交点$P$の座標を求めよ。 解　直線を媒介変数方程式で表示し処理	◦直線と平面との交点の座標：直線をl，平面をα lを媒介変数方程式で表示，交点Pの座標をtで表す。Pはまた平面α上にあるから　Pのx, y, z座標でαの方程式を満たすものが交点Pの座標	解　$\frac{x}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+1}{-1}=t$　とおくと　媒介変数方程式　$x=3t$, $y=4t+1$, $z=-t-1$ 点Pは直線上にあるから　$P(3t, 4t+1, -t-1)$ …①，Pはまた， 平面　$3x+4y-z+21=0$　上にあるから $3\cdot 3t+4(4t+1)-(-t-1)+21=0$　∴ $26t+26=0$　∴ $t=-1$ …②，②を①に代入すると，求める点Pは　$P(-3,-3,0)$ 〃	・一方の直線を媒介変数方程式で表示したものを他方の直線の方程式に代入して，2直線の交点を求めた方法をまねようとする。	・2直線の交点の求め方にならって直線を媒介変数方程式で表示したものを平面に代入して求めようとする。
EX40　点$(-3,1,2)$と平面$2x+3y-6z+1=0$の距離を求めよ。 解　点と平面の距離，公式を利用	◦点と平面の距離 平面$\alpha: ax+by+cz+d=0$，点$P(x_0, y_0, z_0)$からαに下ろした垂線PHの長さhを求めると $H(x_1, y_1, z_1)$，αの法線ベクトルを$\vec{n}=(a, b, c)$とすれば $\overrightarrow{PH}=(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)$ $\overrightarrow{PH}\parallel\vec{n}$であるから $\lvert\overrightarrow{PH}\cdot\vec{n}\rvert=\lvert\overrightarrow{PH}\rvert\lvert\vec{n}\rvert=h\lvert\vec{n}\rvert$ $\therefore\ h=\frac{\lvert\overrightarrow{PH}\cdot\vec{n}\rvert}{\lvert\vec{n}\rvert}=\frac{\lvert a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)+(z_1-z_0)\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ 点Hはα上にあるから　$ax_1+by_1+cz_1+d=0$ よって　$a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)+c(z_1-z_0)=-ax_0-by_0-cz_0-d$ したがって　$h=\frac{\lvert ax_0+by_0+cz_0+d\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ 	解　公式より　$\frac{\lvert 2\cdot(-3)+3\cdot 1-6\cdot 2+1\rvert}{\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}}=\frac{14}{7}=2$ 〃	・点と平面の距離の公式の適用に不慣れである。	・公式の分子＝|平面の方程式の左辺に点の座標を代入したもの|，分母＝法線ベクトルの長さとして用いる。
EX41　次の問いに答えよ (1)　2点$A(3,5,1)$, $B(-1,3,-3)$を直径の両端とする球の方程式を求めよ。 (2)　方程式$x^2+y^2+z^2-2x+4y-8z-4=0$はどんな図形を表すか。 (3)　4点$O(0,0,0)$, $A(2,0,0)$, $B(-1,0,3)$, $C(4,-2,2)$を通る球の方程式を求めよ。 解　(1)　中心は中点，半径は直径の半分に着目 (2)　一般形を標準形に変形 (3)　一般形は4点を通る条件からきまる。	◦球の方程式 1点Cから一定の距離rにある点Pの軌跡を，中心C，半径rの球(球面)という。球の方程式を求めると，　$C(\vec{c})$, $P(\vec{p})$とすれば，$\lvert\overrightarrow{CP}\rvert=r$ ∴ $\lvert\vec{p}-\vec{c}\rvert=r$　よって　$\lvert\vec{p}-\vec{c}\rvert^2=r^2$  この式において　$\vec{P}=(x, y, z)$, $C(a, b, c)$とおけば　$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ …① 点$C(a, b, c)$を中心とし，半径rの球の方程式という。特に，原点を中心とし，半径rの球の方程式は　$x^2+y^2+z^2=r^2$ ①はxy, yz, zxの項を含まないx, y, zの2次方程式 $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ …②　の形である。 逆に　②を変形すると　$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2+\left(z+\frac{c}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2+c^2-4d}{4}$ ①の形になるから　$a^2+b^2+c^2-4d>0$のとき方程式②は球の方程式を表す。 球の方程式　①を標準形，②を一般形という。	解　(1)　球の中心を$C(x, y, z)$，半径をrとする。Cは線分ABの中点であるから， $x=\frac{3-1}{2}=1$, $y=\frac{5+3}{2}=4$, $z=\frac{1-3}{2}=-1$　∴ $C(1,4,-1)$，rは線分ABの長さの$\frac{1}{2}$ であるから　$r=\frac{1}{2}\sqrt{(3+1)^2+(5-3)^2+(1+3)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{16+4+16}=\frac{1}{2}\sqrt{36}=\frac{1}{2}\cdot 6=3$ したがって，公式より求める球の方程式は　$(x-1)^2+(y-4)^2+(z+1)^2=9$ 〃 (2)　方程式を変形すると　$(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)+(z^2-8z+16)=4+1+4+16$ ∴ $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=5^2$　中心が点$(1,-2,4)$，半径5の球を表す。〃 (3)　求める球の方程式を　$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ …①とする。 点O, A, B, Cを通るから　$d=0$ …②　$4+2a+d=0$ …③　$1+9-a+3c+d=0$ …④ $16+4+4+4a-2b+2c+d=0$ …⑤，②を③〜⑤に代入して，これらを解いて $a=-2$, $b=4$, $c=-4$，また，これらを①に代入して，求める球の方程式は， $x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z=0$　∴ $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=3^2$ 〃	・問題(1)では球を図示して考察すれば，中心，半径は1目瞭然である。 ・問題(2)では，左辺をx, y, zに関する完全平方式の和に，右辺を過不足の定数の和に変形して球の標準形にしようとする。 ・問題(3)では，求める球の方程式を標準形にすると計算が複雑になりミスも多くなる。	・中心が中点，半径は直径の半分に着目して解く。また，球面上の点をPとすると，$\angle APB=90^\circ$，$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP}$であるから$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$，ベクトル方程式$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$，$p(x, y, z)$として成分表示して球の方程式を求めることができる。 ・標準形$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$の変形で，中心，半径がきまる。 ・求める球の方程式を一般形にすると計算が楽にできる。
EX42　次の問いに答えよ。 (1)　方程式$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$で表される球面上の点$A(2,4,5)$におけるこの球の接平面を求めよ。 (2)　球面$(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=50$，平面$x+2y+3z=19$が交わってできる円の中心と半径を求めよ。 (3)　中心が$C(0,6,0)$，半径が2である球面上を動く点をQとする。原点をOとし，線分OQの中点Pの軌跡はどんな図形か 解　(1)　球の中心をCとすると接平面の法線ベクトルが$\overrightarrow{CA}$に着目 (2)　求める円の中心は，球の中心を通り，平面に垂直な直線と平面の交点，その半径rは，球の中心と平面の距離d，斜辺$\sqrt{50}$の三平方の定理に着目 (3)　球のベクトル方程式に中点の位置ベクトルを変形した式を代入して，$\vec{P}$に関するベクトル方程式を導く。	◦接平面 点Cを中心とする球の球面上の点Aを通り，半径CAに垂直な平面αを作ると，平面αと球との共有点はAだけ，このとき，平面αをこの球の接平面といい，点Aを接点という。 ◦球と平面が交わるとき，その交わりは円である。 	解　(1)　球の中心をCとすると　$C(1,2,3)$，接平面の法線ベクトルは$\overrightarrow{CA}$である。 $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=(2,4,5)-(1,2,3)=(1,2,2)$，求める接平面の方程式は　点$A$を通り，法線ベクトルが$\overrightarrow{CA}$であるから　$(x-2)+2(y-4)+2(z-5)=0$　∴ $x+2y+2z=20$ 〃 (2)　球面をS，平面をαとする。Sの中心$(1,2,0)$を通り，平面の法線ベクトル$\vec{n}=(1,2,3)$に平行な直線の媒介変数方程式は　$x=1+t$, $y=2+2t$, $z=3t$ …① 直線①と平面αの交点においては，①のx, y, zがαの方程式を満たすから $(1+t)+2(2+2t)+3(3t)=19$　∴ $t=1$ これを①に代入して　$x=2$, $y=4$, $z=3$  また，Sの中心$(1,2,0)$と平面αの距離dは　$d=\frac{\lvert 1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 0-19\rvert}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\frac{14}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}$ ゆえに，円の半径rは　$r=\sqrt{50-d^2}=\sqrt{50-14}=6$　よって，円の中心$(2,4,3)$，半径6 〃 (3)　点C, Q, Pの位置ベクトルをそれぞれ$\vec{c}$, $\vec{q}$, $\vec{p}$とする。公式により，与えられた球のベクトル方程式は　$\lvert\vec{q}-\vec{c}\rvert=2$ …① 点Pは線分OQの中点であるから　$\vec{p}=\frac{1}{2}\vec{q}$　∴ $\vec{q}=2\vec{p}$ …② ②を①に代入して　$\lvert 2\vec{p}-\vec{c}\rvert=2$　両辺を2で割って，∴ $\left\lvert\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{c}\right\rvert=1$, $\frac{1}{2}\vec{c}=(0,3,0)$ であるから，点Pの軌跡は点$(0,3,0)$を中心とし，半径が1の球 〃	・問題(1)では球面と点$A(2,4,5)$における接平面を図示して考察してみる。しかし，補助線CAを引くことは思いつかない。 ・問題(2)では球と平面の交わりを図示して考察する。しかし，交わりの円の中心と半径については，他の要素との関連からとらえることができない。 ・問題(3)では，軌跡の問題であるから，座標を取り入れて球の方程式を表示し，PとQの関係式を変形し，球の方程式へ代入して解こうとする。 球のベクトル方程式を用いて解こうとしてもうまくいかない。	・球の中心をCとし，補助線CAを引いて，接平面の法線ベクトルに着目する。すると求める接平面は点Aを通り，法線ベクトルが$\overrightarrow{CA}$で与えられるから公式を用いて求める。 ・求める円の中心は，球の中心を通り，平面に垂直な直線と平面の交点。その半径rは球の中心と平面の距離をdとすれば，三平方の定理を用いると，$r^2+d^2=50$　から求められる。 別解　$Q(x_1, y_1, z_1)$, $P(x, y, z)$とする。球の方程式は$x^2+(y-6)^2+z^2=4$ …①　Qは①上にあるから，$x_1^2+(y_1-6)^2+z_1^2=4$ …② 中点の関係より　$\frac{x_1}{2}=x$, $\frac{y_1}{2}=y$, $\frac{z_1}{2}=z$　∴ $x_1=2x$, $y_1=2y$, $z_1=2z$，これらを②に代入して整理すると $x^2+(x-3)^2+z^2=1$ 〃