「積分法」の指導に関する一考察

金山　　證*

A Consideration of the Teaching Method of “Integral Calculus”

Satoru KANAYAMA

Abstract

“Integral Calculus” which is similar in essence to “Differential Calculus” is the basis of advanced mathematical analysis and an essential concept which can be applied in field of differential equation.

The author points out two effective ways of teaching “Integral Calculus” to college students.

1　Properly arranging teaching materials to promote understanding and efficiency, utilizing it for the lesson.

2　To Select important 28 examples and to make a detailed teaching plan (pp. 58－66) in accordance with the students' levels of attainment.

1．はじめに

高専数学の基礎としての２年生の「微分法」の学習をしていて気づいたことがある。つまらないところでつまずく，満足な答案が書けないなどである。その原因は，継続的な学習活動ができない学生が少なくない，計算力や証明問題など論理的に展開する方面において学力の低下が目立つことである。詳しく分析すると，

(1) 計算力が十分でない。

①　計算に時間がかかりすぎる。

②　簡単な計算でもミスを犯しがちである。

③　幾ステップもの計算過程を経て解くような複雑な計算は嫌って，取り組もうとしない。

④　定義や公式が自分のものになっていない。

(2) 筋道を立てて論理的に展開する記述が苦手である。

①　証明のし方が十分身についていない。

②　１・２年生の前期までに学んだ公式をうまく引き出して利用できない。

③　図や表を上手に利用しないために問題解法の見通しがうまく立てられない。

④　論理の展開が自分のものとなっていない。

これらの傾向は，「積分法」の学習でもいえる。

「積分法」が不十分であれば今後の学習に支障をきたしてくる。その応用や「２変数の積分法」が理解しにくくなる。

実際の授業においては，数学の成績が良い学生であっても自主的に発展・応用問題に挑戦する学生は少人数である。また，困ったことには教師の指示通りに実行できない学生が増えている。成績中位者の一部の学生から下位者までの学生は自分の頭を使って解くことを全くしない，すなわち，ノートに鉛筆を走らせて解こうとしないのである。机間巡視をしてみると，指名された学生が解答を板書するのを待ってノートに写すのみである。更に驚かされるのは，教師による例題の模範解答の板書事項に関しても，練習問題に出会っても，自力で解決できるとは思えないにも関わらず，ノートを全く取らない学生が存在することである。刺激を与えて，切磋琢磨し合うクラスの雰囲気にはほど遠いものとなっている。

2．研究の趣旨

高校生向きの教科書の「積分法」の取り扱いについて，細部においては取り扱いに軽重があるが大きな差異はない。2年生では整関数の「積分法」，3年生では初等関数の「積分法」を学ぶことになっている。

一方，高専生向きの教科書は高校で扱う内容に加えて逆三角関数の「積分法」まで一気に学ぶ。

しかし，高専の授業時数に制限があるために，「積分法」は教材として必要最小限のものしか取り扱って

*教養学科

（平成18年３月31日受付）

いない。多種多様な内容に対して個々の内容は希薄なものとなっている．章末の問題や傍用問題集に対応できる標準的な実力をつけるには，なるべく授業で必要な積分をマスターできるように例題を補充しなくてはいけない．著者はここに研究のきっかけを見出した。

「積分法」の本質に触れさせるという方針で，補充例題など妥当な例題として，多種類な問題の難易別の問題数の選定及び配列の決定を目指し，現行の教科書・問題集を精査し，重要な項目を精選する。指導細案をまとめ上げ，指導実践を試みる。

3．研究の内容

(1) 目指す学力

「積分法」ついては，微分の逆として不定積分を，面積との関係を通して定積分を取り扱う。その関係を展開する過程を通して明らかにする。本著では「積分法」を数学の対象として正しく把握させ，まとまった知識と一貫した考え方を体得させることを主眼とする。

① 「積分法」の概念や法則の把握と計算力や論理的記述力を養成する。

② 教科書及び問題集の難問を除く標準的な問題が解ける。

(2) 例題とその解法

「積分法」を扱う基礎となる概念や原理・法則を用いる例題，重要な性質を用いる例題，章末の練習問題や傍用問題集の解法に適した例題を内容別に2節に分けて28題を厳選するなど，その例題の選定を工夫する。それらの配列は例題の程度を順次高めていく方法を採用する。解法については簡潔で，要領を得た記述に徹した模範解答を提示するように心掛ける。別解は積極的に取り上げて解法の幅を広げるようにする。これによって，多面的で豊富な解法が身につき，「積分法」の理論に対する再発見・認識につながり，他の分野に応用ができる真の力になると考えられる。

4．「積分法」の指導の意義

(1)「積分法」の概念は「微分法」と同様に数学全般にわたる基本，解析学の基礎，微分方程式論や他の諸科学への応用としてきわめて重要である。「線形代数」と並んで高専数学の中心である。「積分法」の概念の理解を深めさせることが第一義である。

(2) 不定積分を定義し，具体的には微分の逆として不定積分を捉えて理解させる。根幹である和・差・実数倍の不定積分の性質（線形性），また，定積分では積分区間の加法性を導く。さらに，計算の範囲を広げ，積分可能な関数をできるだけ増やす手段として置換積分法，部分積分法の公式を導く。

(3) 例題を通して理解を深めながら，「積分法」の不定積分及び定積分に関する演算法則が成り立つこと，特に，和・差・実数倍の演算は線形性という簡単な法則に従っていることに基づいて，数・整式の演算と同様の取り扱いができることを知る。

(4)「積分法」の有用性はその応用や「多変数の積分法」（多重積分法）への拡張を内蔵している点にあると考えられる。また，多次元の図形の計量の追求に「積分法」を用いた手法を扱うことを通して数学的な方法や考え方の理解を深めることができる。

(5) 面積・体積の求積問題や曲線の長さの計量問題を扱うことを通して「積分法」のもつよさや有用性の理解を深める。

5．「積分法」の指導について

「積分法」は2節から成り立っている，1節では不定積分，2節では定積分を扱っている。

1節の不定積分，2節の定積分は，初等的な関数，整・分数・無理関数，三角・逆三角・対数・指数関数の範囲を扱う。また，それらの性質としての和・差・実数倍における線形性を扱う。次に，置換積分法は合成関数の微分法の逆演算，部分積分は積の微分法の逆演算として位置づけられる。また，置換積分法，部分積分法を扱って積分する手段を理解させ，それを応用できる力をつけると同時に積分演算に習熟させる。不定・定積分の定着と深化を図り，種々の不定・定積分が求められるようにする。また，面積と定積分の関係を理解させ，求積問題を扱う。

「積分法」における質の高い高専数学を学生のものにするための指導の在り方を2つの側面，(1) 教材の配列の妥当性，(2) 指導法の見直しと工夫・改善，から考察をする。

(1) 教材の配列の妥当性

高校での「積分法」の取り扱いは2年生と3年生で分け，2年生では整関数，3年生では残りの初等関数を扱うことになっている。逆三角関数は扱わない。高専では使用の教科書は高校の内容に加えて逆三角関数の「積分法」までを，2・3年生の2年間で扱うことになっている。この場合は不定積分を一まとまり，定積分を一まとまりで扱い，複雑な不定積分を3年生で扱っている。一方，他の教科書は不定積分と定積分が並立した形で取り上げられて，2年生のみで扱うことになっている。

教材の配列で順序が異なっているのは，①不定積分と定積分の配列（分離か並立）②不定積分の取り扱い（一括か分離）である。その取り扱いについては，

① 不定積分と定積分の取り扱いについて

不定積分と定積分を定義する。それらの概念を形成していく過程で見ると，2通りがある。不定積分と定

積分それぞれ置換積分法，部分積分法があり，それぞれの場面，場面で扱うと分離になり，置換積分法，部分積分法を扱う場面で不定積分と定積分を同時に扱うと並立になるのでる。

不定積分の概念と定積分の概念を切り離して扱うときには

ア　不定積分→定積分の順で置換積分法，部分積分法を扱う。

不定積分の概念と定積分の概念を同時に扱うときには

イ　不定積分・定積分を同時に取り上げて，置換積分法→部分積分法の順で扱う。

微分法の逆演算である不定積分は積分の計算の基本である。したがって，定積分の概念を扱う前に不定積分の概念を統合的に取り扱い，その概念の確実な定着を図る。また，定積分を「積分法」の計算の締め括りと見なして，不定積分の後で取り上げる。アの順で指導する方が積分の力をつけるに相応しいと考えられる。

②「積分法」の連続性を重視して２年生のみで扱う。

初等関数における三角・逆三角・対数・指数関数は既知である。既知の関数の不定積分を完了させる点から，不定積分の公式がある関数は先に取り扱う。置換積分法や部分積分法を用いないと積分できない関数は後で取り扱う。三角→指数→対数→逆三角の順に，いろいろな不定積分の一項目として扱う。また，連続的に学習すると効率がよい点から，１変数の「積分法」は２年で，２変数の「積分法」は３年でまとめて学習する。

(2) 指導法の見直しと工夫・改善

教科書（高専の数学２・３：森北出版）では積分を高専の数学２と高専の数学３に分けて記述している。また，いろいろな制約のために定着を図るための十分な配慮がなされているとはいい難い。「積分法」として２年生にまとめて記述して，教科書の不備な箇所や解説不足，或いは解説がなく問題が与えられていて学生が難解に感じる箇所は定義・公式，例題の補充をする。

実際の指導で配慮していることを２点挙げると，

①　事前に指導細案（58ページから66ページに掲載）を作成して授業を展開する。

②　板書事項で要点を押さえ，理解しやすい授業実践を心掛ける。

授業では板書を通して要点を押さえた解説に徹し，時間の許す限り教科書の行間の意味をひもといたり，細かい計算や論理の記述に飛躍がないよう十分注意を払う。分かり易い，丁寧な指導を心掛ける。

6．歴史的覚え書き－「積分法」の史的発展

積分を求積操作とみると，微分より大分歴史が古い。

古代ギリシアの科学者アルキメデス（B.C287－212）は，その著書「放物線の求積法」で図形の面積を，区分求積法と同様の方法で求めたが，その基礎となったのはエウドクソス（B.C408－355）の「取り尽くし法」と呼ばれるものであった。アルキメデスの考えは17世紀になって，ケプラー（1571－1630），カヴァリエリ（1598－1647）などによって受け継がれ，深められた。

積分法は，ニュートン（1642－1727），ライプニッツ（1646－1716）の発見以来，もっぱら微分の逆演算と認識されてきた。一つの体系として組織化したのは，ライプニッツの身近な協力者であったヨハン・ベルヌーイ（1667－1748）である。二人の往復書簡は275通に達するが，その中で，「積分」という用語や記号の導入についても意見交換もなされている。しかし，積分概念そのものを定義する必要性はほとんど認識されてこなかった。

この流れを最初に変えたのは，フーリエ（1768－1830）である。彼は偏微分方程式に現れる「全く任意の関数」に関して，その必要性を認めたが定積分と伝統的な逆微分との整合性は十分ではなかった。

限りなく細い柱状図形の面積の和の極限という区分求積的な定積分の定理から出発し，それを不定積分と結びつけるための理論的根拠（今日の微分積分学の基本定理）を与えたのは，コーシー（1789－1857）である。これは現代微積分法の出発点といってよい。やがてリーマン（1826－1866）は，コーシーの方法が，積分が定義できるための十分条件の一つを与えるに過ぎないことを見抜き，およそ一般に積分可能であるための条件の考察を通して古典的な積分法の基礎を築いたが，柱状図形を考えるという基本的発想は同じであった．この発想を覆すことにより微積分法の大幅な単純化が可能になることが二十世紀に入り発見された。これがルベーグ（1875－1941）積分と呼ばれるものである。

7．参考文献

(1) 数学Ⅱ　川中宣明　数研出版
(2) 数学Ⅲ　加藤順二　数研出版
(3) 数学Ⅱ・Ⅲ　藤田宏・前原昭二　東京書籍
(4) 新編　高専の数学２　田代嘉宏・難波完爾　森北出版
(5) 微分積分Ⅰ　田河生長　大日本図書
(6) 新編　高専の数学３　田代嘉宏・難波完爾　森北出版
(7) 微分積分Ⅱ　田河生長　大日本図書
(8) 高等学校学習指導要領解説　数学編　文部省

指導細案(No. 1)

<table>
<tr><th>問題，解法の手順</th><th>前提内容，関連事項</th><th>解法，技能，計算技術</th><th>誤り易い箇所</th><th>指導上の留意点</th></tr>
<tr>
<td>EX 1.1 次の不定積分を求めよ。
(1) $\int dx$
(2) $\int xdx$
(3) $\int x^2dx$
(4) $\int x^6dx$
(5) $\int \frac{1}{x^3}dx$
(6) $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$
解　公式(1)の適用。</td>
<td rowspan="3">◦不定積分（原始関数）
・関数 $f(x)$ に対して，導関数が $f(x)$ となるような関数、すなわち $F'(x)=f(x)$ となる関数 $F(x)$ を $f(x)$ の不定積分または原始関数という。
例　x^3, x^3+1, x^3-2 などは，すべて $3x^2$ の不定積分である。

$F(x)$ を $f(x)$ の1つの不定積分とするとき，任意の不定積分は $F(x)+c$（c は定数）の形に表される。

〔証〕(⇐)　$\{F(x)+c\}'=F'(x)=f(x)$　よって　$F(x)+c$ も $f(x)$ の不定積分
(⇒)　$G(x)$ を $f(x)$ の任意の不定積分をとすると　$\{G(x)-F(x)\}'$
$=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$　導関数が0である関数は定数関数であるから $G(x)-F(x)=c$（c は定数）したがって　$G(x)=F(x)+c$
$f(x)$ の不定積分を記号 $\int f(x)dx$　（$\int$ はインテグラと読む）
$\int f(x)dx=F(x)+c$（c は定数）
c を積分定数という。$f(x)$ の不定積分を求めることを積分するといい，$f(x)$ を被積分関数という。
$F(x) \underset{\text{積分する}}{\overset{\text{微分する}}{\rightleftarrows}} F'(x)=f(x)$
$\int 1dx=\int dx$,　$\int \frac{1}{f(x)}dx=\int \frac{dx}{f(x)}$ とかく。
(1) $P\neq-1$ のとき　$(x^{P+1})'=(P+1)x^P$　$\therefore\left(\frac{1}{P+1}x^{P-1}\right)'=x^P$
(2) $(\log|x|)'=\frac{1}{x}$　(3) $(e^x)'=e^x$　(3)' $(a^x)'=a^x\log a$　$\therefore\left(\frac{a^x}{\log a}\right)'=a^x$
(4) $(\cos x)'=-\sin x$　$\therefore(-\cos x)'=\sin x$　(5) $(\sin x)'=\cos x$
(6) $(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$　(7) $\left(\frac{1}{\tan x}\right)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$　$\therefore\left(-\frac{1}{\tan x}\right)'=\frac{1}{\sin^2 x}$
(8) $\left(\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\right)'=\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}=\frac{2a}{x^2-a^2}$　$\therefore\left(\frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\right)'=\frac{1}{x^2-a^2}$
(9) $\left(\tan^{-1}\frac{x}{a}\right)'=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\cdot\frac{1}{a}=\frac{a}{x^2+a^2}$　$\therefore\left(\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right)'=\frac{1}{x^2+a^2}$
(10) $\left(\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$
(11) $\left(\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|\right)'=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+A}}}{x+\sqrt{x^2+A}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}$
(12) $\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)'=\sqrt{a^2-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}=2\sqrt{a^2-x^2}$
$\therefore\left\{\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)\right\}'=\sqrt{a^2-x^2}$
(13) $\left(x\sqrt{x^2+A}+A\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|\right)'=\sqrt{x^2+A}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+A}}+\frac{A}{\sqrt{x^2+A}}=2\sqrt{x^2+A}$
$\therefore\left\{\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+A}+A\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|\right)\right\}'=\sqrt{x^2+A}$</td>
<td>解 (1) $\int dx=\int 1dx=\int x^0dx=\frac{1}{0+1}x^{0-1}+c=x+c$ 〃
(2) $\int xdx=\int x^1dx=\frac{1}{1+1}x^{1+1}+c=\frac{1}{2}x^2+c$ 〃
(3) $\int x^2dx=\frac{1}{2+1}x^{2-1}+c=\frac{1}{3}x^3+c$ 〃
(4) $\int x^6dx=\frac{1}{6+1}x^{6-1}+c=\frac{1}{7}x^7+c$ 〃
(5) $\int\frac{1}{x^3}dx=\int x^{-3}dx=\frac{1}{-3+1}x^{-3+1}+c=-\frac{1}{2}x^{-2}+c=-\frac{1}{2x^2}+c$ 〃
(6) $\int\sqrt[3]{x^2}\,dx=\int x^{\frac{2}{3}}dx=\frac{1}{\frac{2}{3}+1}x^{\frac{2}{3}+1}+c=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+c=\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+c$ 〃</td>
<td>・公式　$P\neq-1$ のとき
$\int x^Pdx=\frac{1}{P+1}x^{P-1}+c$
は(1)，(5)，(6)の場合にはそのままの形では使用できない。
・P が負の数や，分数のとき答を出すときにミスをする。</td>
<td>・指数法則を用いて変形することによって公式が用いられることに気づく。
$1=x^0$, $\frac{1}{x^3}=x^{-3}$, $\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$
・$\int x^Pdx=\frac{1}{P+1}x^{P+1}+c$
この不定積分の係数 $\frac{1}{P+1}$ と x の $(P+1)$ 乗は逆数になっている。$P+1$ を先に計算して，逆数を求める。</td>
</tr>
<tr>
<td>EX 1.2　次の不定積分を求めよ。
(1) $\int 5x^4dx$
(2) $\int\left(\frac{1}{t^4}+\sqrt[3]{t^5}\,dt\right)$
(3) $\int(3x^2-4x+5)dx$
(4) $\int\frac{t^2+1}{\sqrt{t}}dt$
(5) $\int\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}dx$
解　不定積分の性質と公式(1)，(2)，及び展開公式の適用。</td>
<td>解 (1) $\int 5x^4dx=5\int x^4dx=5\cdot\frac{1}{5}x^5+c=x^5+c$ 〃
(2) $\int\left(\frac{1}{t^4}+\sqrt[3]{t^5}\right)dt=\int t^{-4}dt+\int t^{\frac{5}{3}}dt=\frac{1}{-4+1}t^{-4+1}+\frac{1}{\frac{5}{3}+1}t^{\frac{5}{3}+1}+c$
$=-\frac{1}{3}t^{-3}+\frac{3}{8}t^{\frac{8}{3}}+c=-\frac{1}{3t^3}+\frac{3}{8}\sqrt[3]{t^8}+c$ 〃
(3) $\int(3x^2-4x+5)dx=3\int x^2dx-4\int xdx+5\int dx$
$=3\cdot\frac{x^3}{3}-4\cdot\frac{1}{2}x^2+5x+c=x^3-2x^2+5x+c$ 〃
(4) $\int(t^2+1)t^{-\frac{1}{2}}dx=\int\left(t^{\frac{3}{2}}+t^{-\frac{1}{2}}\right)dt=\int t^{\frac{3}{2}}dt+\int t^{-\frac{1}{2}}dt$
$=\frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1}+\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}t^{-\frac{1}{2}+1}+c=\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+2t^{\frac{1}{2}}+c=\frac{2}{5}t^2\sqrt{t}+2\sqrt{t}+c$ 〃
(5) $\int\frac{x-2\sqrt{x}+1}{x}dx=\int\left(1-2x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{x}\right)dx=\int dx-2\int x^{-\frac{1}{2}}dx+\int\frac{1}{x}dx$
$=x-2\cdot\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}-1}+\log|x|+c=x-4\sqrt{x}+\log|x|+c$</td>
<td>・公式はそのままの形では使用できない。
・計算ミスをするのは
(1) 性質がうまく使えない。
(2) 指数法則が確実に使えない。
(3) 展開公式があいまいである。</td>
<td>・性質 h, k を定数とするとき $\int\{hf(x)+kg(x)\}dx$
$=h\int f(x)dx+k\int g(x)dx$
及び指数法則を用いたり，展開したりして変形することによって公式が用いられることに気づく。
・指数法則や展開公式でつまづくときは用いる法則や公式を取りあげて復習する。</td>
</tr>
<tr>
<td>EX 1.3　次の不定積分を求めよ。
(1) $\int(2\sin x+3\cos x)dx$
(2) $\int(2e^t+3^t)dt$
(3) $\int(3-\tan x)\cos xdx$
(4) $\int\left(2\cdot10^t-\frac{5}{t}\right)dt$
(5) $\int\left(\frac{2}{\cos^2 x}+\frac{3}{\sin^2 x}\right)dx$
解　不定積分の性質と公式(3)〜(7)，及び展開公式や三角関数の公式の適用。</td>
<td>解
(1) $\int(2\sin x+3\cos x)dx=2\int\sin xdx+3\int\cos xdx=-2\cos x+3\sin x+c$ 〃
(2) $\int(2e^t+3^t)dt=2\int e^tdt+\int 3^tdt=2e^t+\frac{3^t}{\log 3}+c$ 〃
(3) $\int\left(3-\frac{\sin x}{\cos x}\right)\cos xdx=\int(3\cos x-\sin x)dx=3\int\cos xdx-\int\sin xdx$
$=3\sin x+\cos x+c$ 〃
(4) $\int\left(2\cdot10^t-\frac{5}{t}\right)dt=2\int10^tdt-5\int\frac{1}{t}dt=\frac{2\cdot10^t}{\log 10}-5\log|t|+c$ 〃
(5) $\int\left(\frac{2}{\cos^2 x}+\frac{3}{\sin^2 x}\right)dx=2\int\frac{1}{\cos^2 x}dx+3\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=2\tan x-\frac{3}{\tan x}+c$ 〃</td>
<td>・公式はどの場合に適用するとしても，そのままの形では使用できない。
・公式でミスをするのは
(1) 符号　$\int\sin xdx=-\cos x+c$
$\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\frac{1}{\tan x}+c$
(2) e^x と a^x の積分の混同
$\int e^xdx=e^x+c$
$\int a^xdx=\frac{a^x}{\log a}+c$
(3) 多種類の公式がある。</td>
<td>・不定積分の性質をきちんと押さえて変形すれば，確実に答を求めるために公式を正確に用いることができればよいことに気づく。
・公式の符号ミスや混同して用いる誤り，さらに多種類の公式を確実にこなすには微分の逆が積分に着目して求めた積分の関数を微分して，被積分関数と一致するかを吟味する。</td>
</tr>
<tr>
<td>EX 1.4　次の不定積分を求めよ。
(1) $\int\frac{2}{x^2+4}dx$
(2) $\int\frac{3}{\sqrt{9-x^2}}dx$
(3) $\int\left(\frac{6}{x^2+9}+\frac{5}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx$
解　不定積分の性質と公式(9)，(10)の適用。</td>
<td>◦不定積分の公式　c は積分定数，$P\neq-1$
(1) $\int x^Pdx=\frac{1}{P+1}x^{P-1}+c$　(2) $\int\frac{1}{x}dx=\log|x|+c$
(3) $\int e^xdx=e^x+c$　(3)' $\int a^xdx=\frac{a^x}{\log a}+c$
(4) $\int\sin xdx=-\cos x+c$　(5) $\int\cos xdx=\sin x+c$
(6) $\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+c$　(7) $\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\frac{1}{\tan x}+c$</td>
<td>解 (1) $\int\frac{2}{x^2+4}dx=2\int\frac{1}{x^2+2^2}dx=2\cdot\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}+c=\tan^{-1}\frac{x}{2}+c$ 〃
(2) $\int\frac{3}{\sqrt{9-x^2}}dx=3\int\frac{1}{\sqrt{3^2-x^2}}dx=3\sin^{-1}\frac{x}{3}+c$ 〃
(3) $\int\left(\frac{6}{x^2+9}+\frac{5}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx=6\int\frac{1}{x^2+3^2}dx+5\int\frac{1}{\sqrt{2^2-x^2}}dx$
$=6\cdot\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x}{3}+5\sin^{-1}\frac{x}{2}+c$
$=2\tan^{-1}\frac{x}{3}+5\sin^{-1}\frac{x}{2}+c$ 〃</td>
<td>・逆三角関数の導関数についてなじみが薄いので積分についてもとまどう。
・公式でミスをするのは
(1) $\int\frac{1}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{a}\tan\frac{x}{a}+c$
(2) $\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\sin^{-1}\frac{x}{a}+c$
いずれも a^2 の形が入っていることを忘れてミスにつながる。</td>
<td>・性質を用いて変形すれば，公式がきちんとできればよいが，その公式があいまいなとき，積分した関数を微分して，被積分関数にもどることを確認して積分を確実にする。
(1) $\left(\frac{1}{a}\tan\frac{x}{a}\right)'$
$=\frac{1}{a}\cdot\frac{a}{x^2+a^2}=\frac{1}{x^2+a^2}$
(2) $\left(\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)'=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$
で吟味する。</td>
</tr>
</table>

指導細案(No. 2)

問題，解法の手順	前提内容，関連事項	解法，技能，計算技術	誤り易い箇所	指導上の留意点
Ex 1.5 次の不定積分を求めよ。 (1) $\int(2x+1)^3dx$ (2) $\int\frac{dx}{\sqrt{3x-4}}$ (3) $\int\sin(2x+3)dx$ (4) $\int e^{3x}dx$ (5) $\int\frac{x}{\sqrt{1-x}}dx$ [解]　置換積分法(1)の適用 (1)〜(4)は $\int f(x)dx=F(x)+c$ のとき　$\int f(ax+b)dx$ $=\frac{1}{a}F(ax+b)dx+c$ 〔証〕 $ax+b=t$ とおくと $dx=\frac{1}{a}dt$ $\int f(ax+b)dx$ $=\frac{1}{a}\int f(t)dt=\frac{1}{a}F(t)+c$ $=\frac{1}{a}F(ax+b)+c$ を用いてもよい。	(8) $\int\frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\log\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert+c\ (a>0)$ (9) $\int\frac{1}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+c$ (10) $\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\sin^{-1}\frac{x}{a}+c\ (a>0)$ (11) $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}dx=\log\lvert x+\sqrt{x^2+A}\rvert+c\quad(A\neq0)$ (12) $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)+c$ (13) $\int\sqrt{x^2+A}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+A}+A\log\lvert x+\sqrt{x^2+A}\rvert\right)+c$ ◦不定積分の性質　h,kを定数とする。 (1) $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ (2) $\int\{f(x)\pm g(x)\}dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$ (複号同順) まとめて　$\int\{hf(x)+kg(x)\}dx=h\int f(x)dx+k\int g(x)dx$ …(I) 〔証〕 $\int f(x)dx=F(x)+c_1$，$\int g(x)dx=G(x)+c_2$ とする $h\int f(x)dx+k\int g(x)dx=hF(x)+kG(x)+(hc_1+kc_2)$…① $\{hF(x)+kG(x)\}'=hF'(x)+kG'(x)=hf(x)+kg(x)$ $\therefore\ \int\{hf(x)+kg(x)\}dx=hF(x)+kg(x)+c$…② ここで積分定数 c, c_1, c_2を　$hc_1+kc_2=c$ となるように定めると①と②の右辺は等しい。よって公式（I）は成り立つ（終）	[解]　(1)　$2x+1=t$ …①とおく。$\therefore x=\frac{1}{2}(t-1)$　$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}$ …②　①，②を与式に代入　与式$=\int t^3\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int t^3dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}t^4+c=\frac{1}{8}(2x+1)^4+c$ 〔答案〕$2x+1=t$ …①とおく。微分して　$2dx=dt$　$\therefore dx=\frac{1}{2}dt$ …② ①，②を与式に代入　与式$=\frac{1}{2}\int t^3dt=\frac{1}{8}t^4+c=\frac{1}{8}(2x+1)^4+c$　〃 (2)　$\int\frac{dx}{\sqrt{3x-4}}=\int(3x-4)^{-\frac{1}{2}}dx$ $3x-4=t$ …①とおく。微分して　$3dx=dt$　$\therefore dx=\frac{1}{3}dt$…②　①，②を与式に代入　与式$=\frac{1}{3}\int t^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}+c}+c=\frac{2}{3}t^{\frac{1}{2}}+c=\frac{2}{3}\sqrt{3x-4}+c$　〃 (3)　$2x+3=t$ …①とおく。微分して$2dx=dt$　$\therefore dt=\frac{1}{2}dt$…②　①，②を与式に代入　与式$=\frac{1}{2}\int\sin t\,dt=-\frac{1}{2}\cos t+c=-\frac{1}{2}\cos(2x+3)+c$　〃 (4)　$3x=t$…①とおく。微分して　$3dx=dt$　$\therefore dx=\frac{1}{3}dt$ … ②　①，②を与式に代入　与式$=\frac{1}{3}\int e^tdt=\frac{1}{3}e^t+c=\frac{1}{3}e^{3x}+c$　〃 (5)　$\int\frac{x}{\sqrt{1-x}}dx=\int x(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx$ $1-x=t$ …①とおく。$-dx=dt$　$\therefore dx=-dt$ …②　①より$x=1-t$ …③ ①〜③を与式に代入　与式$=-\int(1-t)t^{-\frac{1}{2}}dt=\int(-t^{-\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{2}})dt$ $=-\frac{1}{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\frac{3}{2}}t^{\frac{3}{2}}+c=-2t^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{3}(t-3)t^{\frac{1}{2}}+c=-\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{1-x}+c$　〃	• $(2x+1)^3=8x^3+12x^2+6x+1$ 展開して不定積分を求めようとする。また，(2)〜(5)については展開できないから，不定積分は求められない。 • $t=2x+1$ のとき，微分dt を求めよ。 $dt=(2x+1)'dx=2dt$　は微分の商で既習であるが自分のものとなっていない。 • (2)，(5)は指数法則を用いて変形しないと求められない。 • (5)は$1-x=t$，$dx=-dt$を与式に代入しても不定積分ができない。 〔別解〕$\sqrt{1-x}=t$　とおくと $x=1-t^2$　$dx=-2tdt$ 与式$=\int\frac{1-t^2}{t}\cdot(-2t)dt$ $=-2\int(1-t^2)dt$ $=-2(t-\frac{t^3}{3})+c$ $=-\frac{2}{3}(3-t^2)t+c$ $=-\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{1-x}+c$　〃	• 展開のとき，不定積分を求めるときミスをし易い。(　)を t とおいて，置換積分法を用いると計算ミスが少ないことに気づく。 • 置換積分は $x=g(t)$ に，$dx=g'(t)dt$ に置換することであるから，解法の〔答案〕の書き方を採用する。 • $2x+1=t$ のとき (左辺をx で微分)× dx (右辺を t　〃　)× dt とすると微分の商の考えがはっきりする。 • 指数法則を用いて被積分関数が(　)を用いて表される。(　)を t とおく方針が明確になる。 • 置換することは変数変換することであることを意識させる。xもt で表わして与式を t の関数の積分にする。
Ex 1.6　次の不定積分を求めよ。 (1) $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$ (2) $\int xe^{x^2}dx$ (3) $\int\sin^2x\cos x\,dx$ [解]　置換積分法(2)の適用	◦置換積分法 (1) $\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)gt$ ただし　$x=g(x)$ (2) $\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(t)dx$ ただし $g(x)=t$ 〔証〕 $y=\int f(x)dx$, $x=g(t)$とすると$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=f(x)g'(t)=f(g(t))g'(t)$ $\therefore\ y=\int f(g(t))g'(t)dt$　よって (1)は成り立つ 公式(1)においてxとt を入れ換えて　$\int f(g(x)g'(x)dx=\int f(t)dt$　(終) ◦計算の簡略化　$x=g(t)$のとき　$\frac{dx}{dt}=g'(t)\Leftrightarrow dx=g'(t)dt$ $\int f(x)dx$においてxを$g(t)$に，dxを$g'(x)dt$ に置換すると公式(1)を得る。 $\int f(g(x))g'(x)dx$ において$g(x)$を t に，$g'(x)dx=dt$に置換すると公式(2)を得る。	[解]　(1)　$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx=\int x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}dx$ $x^2+1=t$ …①とおく。微分して　$2xdx=dt$　$\therefore xdx=\frac{1}{2}dt$ …② ①，②を与式に代入　与式$=\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+c=\frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}+c$　〃 (2)　$x^2=t$ …①とおく。　$2xdx=dt$　$\therefore xdx=\frac{1}{2}dt$ …② ①，②を与式に代入　与式$=\frac{1}{2}\int e^tdt=\frac{1}{2}e^t+c=\frac{1}{2}e^{x^2}+c$　〃 (3)　$\sin x=t$ …①とおく。$\cos xdx=dt$ …② ①，②を与式に代入　与式$=\int t^2dt=\frac{1}{3}t^3+c=\frac{1}{3}\sin^3x+c$	• (1)は指数法則を用いて表すと(　)がつく。(　)を t とおく方針は変わらないが(2) (3)では何を t とおくかわからない。 • (1)は $(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$，$(x^2+1)'=2x$ (2)は e^{x^2},$(x^2)'=2x$ (3)は $\sin^2x$，$(\sin x)'=\cos x$ に着目して(　)を t とおく。	• (3)では $\sin^2x=(\sin x)^2$ と見て(　)を t とおく方針は変わらないが，(2)は(　)を用いても表わされないから何を t におくかがはっきりしない。置換積分法(2)で合成関数と導関数の積の積分 $\int f(g(x))g'(x)dx$ $=\int f(t)dt$ $g(x)$ を t とおく。発想の転換が必要。
Ex 1.7　次の不定積分を求めよ。 (1) $\int\frac{2x}{x^2+4}dx$ (2) $\int\frac{e^x}{e^x+1}dx$ (3) $\int\frac{1}{x\log x}dx$ (4) $\int\tan x\,dx$ [解]　公式(14)の適用	◦公式(14)　$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log\lvert f(x)\rvert+c$ 〔証〕$f(x)=t$　とおくと$f'(x)dx=dt$ ゆえに　$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dt=\int\frac{1}{t}dt=\log\lvert t\rvert+c=\log\lvert f(x)\rvert+c$　(終)	[解]　(1)　$\int\frac{2x}{x^2+4}dx=\int\frac{(x^2+4)'}{x^2+4}dx=\log(x^4+4)+c$ (2)　$\int\frac{e^x}{e^x+1}dx=\int\frac{(e^x+1)'}{e^x+1}dx=\log(e^x+1)+c$ (3)　$\int\frac{1}{x\log x}dx=\int\frac{(\log x)'}{\log x}dx=\log\lvert\log x\rvert+c$ (4)　$\int\tan x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx=-\log\lvert\cos x\rvert+c$ 公式になじまないときは (1)　$x^2+4=t$　とおく　$2xdx=dt$　与式$=\int\frac{dt}{t}$ (2) $e^x+1=t$　とおく　$e^xdx=dt$　与式$=\int\frac{dt}{t}$　(3) $\log x=t$　とおくと $\frac{1}{x}dx=dt$　与式$=\int\frac{dt}{t}$ (4) $\cos x=t$ とおくと $-\sin xdt$　$\therefore\sin xdt=-dt$　与式$=-\int\frac{dt}{t}$　〃 として不定積分を求める。	• 分母の関数の導関数が分子になる事を確認できる。(1)〜(4)は公式の適用は難しくない。 • (3)の答えとして$\log\lvert x\rvert$とかくミスをする。 • (4)は公式を用いて変化できないと求められない。 また，$\cos x$の微分は$-\sin x$になることにうっかり－（マイナス）を忘れて失敗する。	• $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log\lvert f(x)\rvert+c$ の$f(x)$に当るのが (1)x^2+4 (2)e^x+1, (3)$\log x$であることを押さえて答を出すと，(3)の答は$\log\lvert\log x\rvert+c$となり，ミスを防ぐことができる。 • 公式 $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$を用いて変形する。 $(\cos x)'=-\sin x$ であるから，$\sin x=-(\cos x)'$と符号をきちんと押さえる。

指導細案(No. 3)

問題，解法の手順	前提内容，関連事項	解法，技能，計算技術	誤り易い箇所	指導上の留意点
EX 1.8 次の不定積分を求めよ。 (1) $\int x\sin x dx$ (2) $\int x\log x dx$ (3) $\int \log x dx$ (4) $\int (x+1)e^x dx$ 解 部分積分法の適用。	・部分積分法 $\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$ 〔証〕 $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ よって $f(x)g(x)=\int f'(x)g(x)dx+\int f(x)g'(x)dx$ $\therefore \int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)d(x)dx$ (終)	解 (1) $\int x\sin x dx=\int x(-\cos x)'dx$ $=-x\cos x+\int \cos x dx$ $=-x\cos x+\sin x+c$ $\boxed{\begin{array}{ll} f=x \searrow & g'=\sin x \\ f'=1 \leftarrow & g=-\cos x \end{array}}$ (2) $\int x\log x dx=\int\left(\frac{1}{2}x^2\right)'\log x dx$ $=\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{2}\int x^2\cdot\frac{1}{x}dx$ $=\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{2}\int x dx=\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{4}x^2+c$ $\boxed{\begin{array}{ll} f=\log x \searrow & g'=x \\ f'=\frac{1}{x} \leftarrow & g=\frac{1}{2}x^2 \end{array}}$ (3) $\int \log x dx=\int (x)'\log x dx$ $=x\log x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx$ $=x\log x-\int dx=x\log x-x+c$ $\boxed{\begin{array}{ll} f=\log x \searrow & g'=1 \\ f'=\frac{1}{x} \leftarrow & g=x \end{array}}$ (4) $\int (x+1)e^x dx=\int (x+1)(e^x)'dx$ $=(x+1)e^x-\int (x+1)'e^x dx$ $=(x+1)e^x-\int e^x dx=(x+1)e^x-e^x+c=xe^x+c$ $\boxed{\begin{array}{ll} f=x+1 \searrow & g'=e^x \\ f'=1 \leftarrow & g=e^x \end{array}}$	・$f(x)$にとる関数がきまれば，$g'(x)$はきまる。$f(x)$のとり方がわからない。 ・微分と積分が入り混じって計算を行うので符号ミスをし易い。 ・$\int \log x dx$はこのままの形ではできない。	・$g(x)=\int g'(x)dx$， $\int f'(x)g(x)dx$が積分し易いようにきめることが原則である。$f(x)$にとる順番は 1. $\log x$, 2. x^n, 3. $\left\{\begin{array}{l} e^x \\ \cos x \\ \sin x \end{array}\right.$ $f(x)$にとる関数は微分して次数が下がり，$g'(x)$にとる関数は微分しても，積分しても次数が不変のものにとる。 ・$(\sin x)'=\cos x$, $\int \sin x dx$ $=-\cos x+c$ $(\cos x)'=-\sin x$, $\int \cos x dx=\sin x+c$ ・$\int \log x dx=\int 1\cdot\log x dx$ とみる。
EX1.9 次の不定積分を求めよ。 (1) $\int x^2e^x dx$ (2) $\int e^x\sin x dx$ 解 部分積分法の繰り返し適用。	EX1.9 (1)〔別解〕 $I=\int e^x\sin x dx=\int e^x(-\cos x)'dx$とおく。 $=-e^x\cos x+\int e^x\cos x dx$ $\boxed{\begin{array}{ll} f=e^x \searrow & g'=\sin x \\ f'=e^x \leftarrow & g=-\cos x \end{array}}$ $=-e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\sin x dx+2c$ (I) $\boxed{\begin{array}{ll} f=e^x \searrow & g'=\cos x \\ f'=e^x \leftarrow & g=\sin x \end{array}}$ $\therefore\ 2I=e^x\sin x-e^x\cos x+2c$ $\therefore\ I=\frac{1}{2}(e^x\sin x-e^x\cos x)+c$ 〃	解 (1) $\int x^2e^x dx=\int x^2(e^x)'dx$ $=x^2e^x-2\int xe^x dx$ $=x^2e^x-2(xe^x-\int e^x dx)=x^2e^x-2xe^x+2e^x+c$ $\boxed{\begin{array}{ll} f=x^2 \searrow & g'=e^x \\ f'=2x \leftarrow & g=e^x \end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{ll} f=x \searrow & g'=e^x \\ f'=1 \leftarrow & g=e^x \end{array}}$ (2) $I=\int e^x\sin x dx=\int (e^x)'\sin x dx$とおく。 $=e^x\sin x-\int e^x\cos x dx$ $=e^x\sin x-(e^x\cos x+\int e^x\sin x dx)+2c$ (I) $\boxed{\begin{array}{ll} f=\sin x \searrow & g'=e^x \\ f'=\cos x \leftarrow & g=e^x \end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{ll} f=\cos x \searrow & g'=e^x \\ f'=-\sin x \leftarrow & g=e^x \end{array}}$ $\therefore 2I=e^x\sin x-e^x\cos x+2c\quad \therefore I=\frac{1}{2}(e^x\sin x-e^x\cos x)+c$ 〃	・(1)は$f(x)=x^2$, $g'(x)=e^x$とときまる。しかし(2)はきまらない。 ・(1)は部分積分法を繰り返し用いることに慣れていない。 ・(2)は部分積分を1回用いて計算しても求められない。	・(2)は次の2通りが考えられる。 (i) $\left\{\begin{array}{l} f(x)=e^x \\ g'(x)=\sin x \end{array}\right.$ (ii) $\left\{\begin{array}{l} f(x)=\sin x \\ g'(x)=e^x \end{array}\right.$ 解答は(i)を用いたが，(ii)を用いても求められる。 ・$\int xe^x dx$は部分積分法を適用して求められる。 ・$I=\int e^x\sin x dx$とおいて，部分積分法を2回繰り返し用いる。
EX 1.10 次の不定積分を求めよ。 (1) $\int \frac{2x^2+x+3}{x+1}dx$ (2) $\int \frac{3x}{(x-2)(x+1)}dx$ (3) $\int \frac{dx}{x^2-9}$ (4) $\int \frac{dx}{4x^2-1}$ 解 (1)，(2)は変形をして積分，(3)，(4)は公式(8)の適用。	◦公式(8) $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\log\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert+c \quad (a>0)$ 〔証〕 $\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{(x-a)(x+a)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x+a}$ (A, Bは定数)とかけたとする。 $=\frac{(A+B)x+a(A-B)}{(x-a)(x+a)}$ 分子の係数を比較して xの係数について $\left\{\begin{array}{l} A+B=0 \quad \cdots① \\ a(A-B)=1 \cdots② \end{array}\right.$ 定数項について ①より $B=-A\cdots③$ ③を②に代入 $2aA=1 \quad \therefore A=\frac{1}{2a}$ ③より $B=-\frac{1}{2a}$ よって $\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)$ $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx$ $=\frac{1}{2a}\int\left\{\frac{(x-a)'}{x-a}-\frac{(x+a)'}{x+a}\right\}dx$ $=\frac{1}{2a}(\log\lvert x-a\rvert-\log\lvert x+a\rvert)+c=\frac{1}{2a}\log\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert+c$ (終) 〃	解 (1) $2x^2+x+3=(x+1)(2x-1)+4$であるから 与式 $=\int\left(2x-1+\frac{4}{x+1}\right)dx=\int (2x-1)+4\frac{(x+1)'}{x+1}dx=x^2-x+4\log\lvert x+1\rvert+c$ 〃 (2) $\frac{3x}{(x-2)(x+1)}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+1}$とかけたとする。 $=\frac{(a+b)x+(a-2b)}{(x-2)(x+1)}$ 分子の係数を比較して xの係数について $\left\{\begin{array}{l} a+b=3 \\ a-2b=0 \end{array}\right.$ 定数項について $\therefore \left\{\begin{array}{l} a=2 \\ b=1 \end{array}\right.$ 与式 $=\int\left(\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x+1}\right)dx=\int\left(2\frac{(x-2)'}{x-2}+\frac{(x+1)'}{x+1}\right)dx$ $=2\log\lvert x-2\rvert+\log\lvert x+1\rvert+c$ $=\log(x-2)^2\lvert x+1\rvert+c$ (3) $\int \frac{dx}{x^2-9}=\int \frac{dx}{x^2-3^2}=\frac{1}{2\cdot 3}\log\left\lvert\frac{x-3}{x+3}\right\rvert+c=\frac{1}{6}\log\left\lvert\frac{x-3}{x+3}\right\rvert+c$ 〃 (4) $\int \frac{dx}{4x^2-1}=\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}\log\left\lvert\frac{x-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right\rvert+c$ $=\frac{1}{4}\log\left\lvert\frac{2x-1}{2x+1}\right\rvert+c$ 〃	・分数式の積分の公式がないのでできない。 (1)は仮分数式，(2)は公式 (14) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log\lvert f(x)\rvert+c$ がある。 分母$(x-2)(x+1)=x^2-x-2$ $\int \frac{3x}{(x-2)(x+1)}dx$ $=\int \frac{\frac{3}{2}(x^2-x-2)'}{x^2-x-2}dx$ $+\int \frac{3}{2}\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}dx$ を 用いるとできるが計算が繁雑になる。 ・(3)，(4)は公式(8)を用いるとできるが，(4)は変形しないで用いようとしてミスをする。また，分母のa^2に該当する値をaと混同して用いるミスをする。	・分子の次数≧分母の次数のときは仮分数式を帯分数式に直して次数を下げる。分子を分母で割ったとき商が$2x-1$，余りが4であるから， $\frac{2x^2+x+3}{x+1}=2x-1+\frac{4}{x+1}$ と変形できる。 ・仮分数式でないときは，部分分数に分解する。このとき，分数式の恒等式の考え方を利用する。 ・(4)は分母のx^2の係数が1のときに公式(8)が適用できることに注意して，まず$\frac{1}{4}$を括り出す。 公式をきちんととらえる。不定積分を微分すると，もとの関数になることを利用して検算する。

指導細案(No. 4)

問題，解法の手順	前提内容，関連事項	解法，技能，計算技術	誤り易い箇所	指導上の留意点
EX 1.11 次の不定積分を求めよ。 (1) $\int \tan^2 x dx$ (2) $\int \sin^2 x dx$ (3) $\int \sin 3\theta \cos 2\theta d\theta$ 解 三角関数の公式を用いて既知の不定積分の形に変形後積分する。	◦三角関数の公式 (1) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ (2) $1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ (3) $1+\frac{1}{\tan^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$ ・半角公式 (1) $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ (2) $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ ・積から和の公式 (1) $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$ (2) $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$ (3) $\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$ ◦不定積分の公式 $\int f(x)dx = F(x)+c$ のとき $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+c$	解 (1) $1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$により $\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}-1$ $\therefore \int \tan^2 x dx = \int(\frac{1}{\cos^2 x}-1)dx = \tan x - x + c$ 〃 (2) $\cos 2x = 1-2\sin^2 x$ により $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ $\therefore \int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}\sin 2x)+c$ $= \frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x + c$ 〃 (3) $\sin 3\theta\cos 2\theta = \frac{1}{2}(\sin 5\theta + \sin\theta)$ $\therefore \int \sin 3\theta \cos 2\theta d\theta = \frac{1}{2}\int(\sin 5\theta+\sin\theta)d\theta = \frac{1}{2}(-\frac{1}{5}\cos 5\theta - \cos\theta)+c$ $= -\frac{1}{10}\cos 5\theta - \frac{1}{2}\cos\theta + c$ 〃	・$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$と変形しても既知の不定積分の形にならない。 ・三角関数の半角や積を和になおす公式についてはきちんと自分のものになっていない。 ・$\int \cos 2x dx$や$\int \sin 5\theta d\theta$について$2x$, 5θをtと置換	・公式が用いられる不定積分の形に変形する。 $\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$ $= \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}$ $= \frac{1}{\cos^2 x}-1$ ・2倍角や加法定理から導いたことを想起させて，確実に扱わせる。 ・$\int f(ax+b)dx$ $= \frac{1}{a}F(ax+b)+c$ を用いると素早くできる。
EX1.12 次の不定積分を求めよ。 (1) $\int \frac{dx}{e^x+1}$ (2) $\int \frac{dx}{\sin x}$ 解 置換積分法の適用。次に部分分数に分解し，不定積分が求められる形にする。	EX 1.12 (1)〔別解〕$e^x = t$ …①とおくと $e^x dx = dt$ $\therefore dx = \frac{1}{e^x}dt = \frac{1}{t}dt$ …② ①，②を与式に代入 与式 $= \int \frac{dt}{(t+1)t} = \int(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1})dt = \log\lvert t\rvert - \log\lvert t+1\rvert + c$ $= \log e^x - \log(e^x+1)+c$ $= x - \log(e^x+1)+c$ 〃 ◦公式(9)～(13)について (9) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+c$ (10) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a}+c$ (11) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \log\lvert x+\sqrt{x^2+A}\rvert + c$ (12) $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a})+c$ (13) $\int \sqrt{x^2+A}dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+A}+A\log\lvert x+\sqrt{x^2+A}\rvert)+c$	解 (1) $e^x+1 = t$ …①とおくと $e^x = t-1$ $\therefore e^x dx = dt$ $\therefore dx = \frac{1}{e^x}dt = \frac{1}{t-1}dt$ …②, ①,②を与式に代入 与式 $= \int \frac{1}{t(t-1)}dt$ $= \int(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t})dt$ $= \int\{\frac{(t-1)'}{t-1}-\frac{1}{t}\}dt$ $= \log\lvert t-1\rvert - \log\lvert t\rvert + c$ $= \log e^x - \log(e^x+1)+c$ $= x - \log(e^x+1)+c$ 〃 $\frac{1}{t(t-1)} = \frac{a}{t-1}+\frac{a}{t}$とかけたとする。 $= \frac{(a+b)t-b}{t(t-1)}$ 分子の係数比較をして tの項… $a+b=0$ 定数項… $-b=1$ $\therefore \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$ $\therefore \frac{1}{t(t-1)} = \frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}$ (2) $\frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}$ 与式 $= \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx$ …① $\cos x = t$ …②とおくと $-\sin x dx = dt$ $\therefore \sin x dx = -dt$ …③, ②,③を①に代入 与式 $= \int \frac{-dt}{1-t^2} = \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\log\left\lvert\frac{t-1}{t+1}\right\rvert + c$ (∵公式(8)) $= \frac{1}{2}\log\left\lvert\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right\rvert + c = \frac{1}{2}\log(\frac{1-\cos x}{1+\cos x})+c$ 〃	・$e^x+1=t$と置換しても被積分関数をxからtに変数変換できない。 ・部分分数に分解に気づかないために積分できない。 ・$\frac{1}{\sin x}$の分母，分子に$\sin x$を掛ける発想は思いつかない。かつ，$\sin^2 x$を$\cos^2 x$に変換する着想も難しい。 ・$\int \frac{dt}{1-t^2}$の公式がないのに誤って用いる。	・$e^x+1=t$とおくと$e^x=t-1$, e^xが$t-1$と表されることに着目して，微分して$e^x dx = dt$ $\therefore dx = \frac{1}{e^x}dt = \frac{dt}{t-1}$とすると$x$から$t$に変数変換できる。 ・$\frac{1}{t(t-1)} = \frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}$と部分分数に分解することによって積分できる形ができる。 ・$\sin^2 x = 1-\cos^2 x$を用いるとサインをコサインに変換されることに着目し$\sin x$を分母，分子に掛けて分母に$\sin^2 x$を作ることができる。さらに，$f(\cos\theta)\sin\theta$のタイプの置換積分に帰着されることに着目できる。 ・$\int \frac{dt}{t^2-1}$の公式ならあることを強調する。
EX 1.13 次の不定積分を求めよ。 (1) $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$ (2) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$ (3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x}}$ 解 xの完全平方式に変形後，置換積分法の適用。	〔証〕 (9) $x = a\tan\theta(a>0, -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2})$ …①とおく。$dx = \frac{a d\theta}{\cos^2\theta}$ …② $\frac{1}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2(1+\tan^2\theta)} = \frac{\cos^2\theta}{a^2}$ …③, ②,③を左辺に代入して $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{a}{a^2}\int \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}d\theta = \frac{1}{a}\int d\theta = \frac{1}{a}\theta + c = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+c$ (∵①より$\theta = \tan^{-1}\frac{x}{a}$) (10), (12) $x = a\sin\theta$ $(a>0, -\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2})$ …①とおく。 $dx = a\cos\theta d\theta$ …② $\sqrt{a^2-x^2} = a\sqrt{1-\sin^2\theta} = a\sqrt{\cos^2\theta} = a\cos\theta$ …③ ②,③を左辺に代入して (10) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a}{a}\int \frac{\cos\theta}{\cos\theta}d\theta = \int d\theta = \theta + c = \sin^{-1}\frac{x}{a}+c$ (∵①より$\theta = \sin^{-1}\frac{x}{a}$) (12) $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = a^2\int \cos^2\theta d\theta = \frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2\theta)d\theta = \frac{a^2}{2}(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta)+c$ $= \frac{a^2}{2}(\theta+\sin\theta\cos\theta)+c = \frac{a^2}{2}(\sin^{-1}\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a})+c$ $= \frac{1}{2}(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a})+c$ (終)	解 (1) $\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+2^2}$ …① $x+1 = t$ …②とおく。 $dx = dt$ …③, ②,③を①に代入 与式 $= \int \frac{dx}{t^2+2^2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{t}{2}+c$ $= \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x+1}{2}+c$ 〃 (2) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(\sqrt{3}x)^2}}$ …① $\sqrt{3}x = t$ …②とおく。$\sqrt{3}dx = dt$ $\therefore dx = \frac{dt}{\sqrt{3}}$ …③, ②,③を①に代入 与式 $= \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sin^{-1}t + c$ $= \frac{1}{\sqrt{3}}\sin^{-1}\sqrt{3}x + c$ 〃 (3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2-4}}$ …① $x-2 = t$ …②とおく。 $dx = dt$ …③ ②,③を①に代入 与式 $\int \frac{dx}{\sqrt{t^2-4}} = \log\lvert t+\sqrt{t^2-4}\rvert + c = \log\lvert x-2+\sqrt{x^2-4x}\rvert + c$ 〃	・(1)は公式(9)，(2)は公式(10)，(3)は公式(11)が用いられることに気づかない。公式が適用されるにはどんな形や置換が必要であるか方向性が見い出せない。	・分母やその根号内を，(1)のとき，$(x+1)^2+2^2$に，(2)のとき，$1-(\sqrt{3}x)^2$に，(3)のとき，$(x+2)^2-4$に変形すると見通しが明るい。1次式$x+1$, $\sqrt{3}x$, $x-2$をtと置換すると，公式(9)から(11)が適用されることに着目できる。

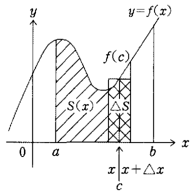
指導細案(No. 5)

問題，解法の手順	前提内容，関連事項	解法，技能，計算技術	誤り易い箇所	指導上の留意点
EX 1.14　次の不定積分を求めよ。 (1) $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ (2) $\int\sin^{-1}x\,dx$ 解　部分積分法の適用。 (1)では積分できる形に変形。 (2)では置換積分法の適用。	(11), (13)　$\sqrt{x^2+A}=t-x\ (A\neq0)$ …①とおく。 $x^2+A=t^2-2tx+x^2$ ∴ $x=\frac{t^2-A}{2t}$ ∴ $dx=\frac{t^2+A}{2t^2}dt$ …②, $\sqrt{x^2+A}=t-x=t-\frac{t^2-A}{2t}=\frac{t^2+A}{2t}$ …③, ②, ③を左辺に代入 (11) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}=\int\frac{1}{\frac{t^2+A}{2t}}\cdot\frac{t^2+A}{2t^2}dt=\int\frac{1}{t}dt=\log\|t\|+c$ $=\log\left\|x+\sqrt{x^2+A}\right\|+c$ (13) $\int\sqrt{x^2+A}\,dx=\int\frac{t^2+A}{2t}\cdot\frac{t^2+A}{2t^2}dt=\int\frac{t^4+2At^2+A^2}{4t^3}dt$ $=\frac14\int\left(t+\frac{A^2}{t^3}+\frac{2A}{t}\right)dt=\frac14\left\{\frac{t^2}{2}-\frac{A^2}{2t^2}+2A\log\|t\|\right\}+c$ $=\frac12\left\{\frac{t^2-A}{2t}\ \frac{t^2+A}{2t}+A\log\|t\|\right\}+c$ $=\frac12\left(x\sqrt{x^2+A}+A\log\left\|x+\sqrt{x^2+A}\right\|\right)+c$	解 (1) $I=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int(x)'\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ とおく。 $=x\sqrt{a^2-x^2}+\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$ $=x\sqrt{a^2-x^2}+\int\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}-\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)dx$ $=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}-I+2c$ ∴ $I=\frac12\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)+c$ 〃 $\begin{array}{ll} f=\sqrt{a^2-x^2} & g'=1 \\ f'=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}} & g=x \end{array}$ (2) $\int\sin^{-1}x\,dx=\int(x)'\sin^{-1}x\,dx$ $=x\sin^{-1}x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ $=x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}+c$ 〃 $\begin{array}{ll} f=\sin^{-1}x & g'=1 \\ f'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & g=x \end{array}$	・積分する方針が立たない。 ・$\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$ が求められない。 ・$\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ の積分の求め方が怪しい。	・$\int\log x\,dx$ で用いた部分積分法を想起する。 ・$x^2=x^2-a^2+a^2$ $=a^2-(a^2-x^2)$ と変形して積分する。 積分できる形に変形する。 ・$\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ $=\frac12\int(1-x^2)'(1-x^2)^{-\frac12}dx$ $=-\frac12\int t^{-\frac12}dt$ $=-\sqrt{1-x^2}+c$ (∵ $1-x^2=t$ とおく)
EX 1.15　次の不定積分を求めよ。 (1) $\int\sqrt{3+2x-x^2}\,dx$ (2) $\int\sqrt{x^2+4x+3}\,dx$ 解　公式(12), (13)の適用。 (1), (2)ともに公式が用いられる形に変形後，置換積分法(1)の適用。	(13)の〔別証〕 Ex 1.14 の(1)の証明に用いた部分積分法による証明。 $I=\int\sqrt{x^2+A}\,dx=\int(x)'\sqrt{x^2+A}\,dx$ とおく。 $=x\sqrt{x^2+A}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+A}}dx$ $=x\sqrt{x^2+A}-\int\left(\frac{x^2+A}{\sqrt{x^2+A}}-\frac{A}{\sqrt{x^2+A}}\right)dx$ $=x\sqrt{x^2+A}-I+A\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}$ $=x\sqrt{x^2+A}-I+A\log\left\|x+\sqrt{x^2+A}\right\|+2c$ ∴ $I=\frac12\left(x\sqrt{x^2+A}+A\log\left\|x+\sqrt{x^2+A}\right\|\right)+c$ $\begin{array}{ll} f=\sqrt{x^2+A} & g'=1 \\ f'=\frac{x}{\sqrt{x^2+A}} & g=x \end{array}$	解 (1) $\int\sqrt{3+2x-x^2}\,dx=\int\sqrt{-(x^2-2x)+3}\,dx=\int\sqrt{2^2-(x-1)^2}\,dx$ …①　$x-1=t$ …②とおく。　$dx=dt$ …③，②, ③を①に代入 与式 $=\int\sqrt{2^2-t^2}\,dt=\frac12\left(t\sqrt{4-t^2}+4\sin^{-1}\frac{t}{2}\right)+c$ $=\frac12\left\{(x-1)\sqrt{3+2x-x^2}+4\sin^{-1}\frac{x-1}{2}\right\}+c$ 〃 (2) $\int\sqrt{x^2+4x+3}\,dx=\int\sqrt{(x^2+4x)+3}\,dx=\int\sqrt{(x+2)^2-1}\,dx$ …①　$x+2=t$ …②とおく $dx=dt$ …③，②, ③を①に代入 与式 $=\int\sqrt{t^2-1}\,dx=\frac12\left(t\sqrt{t^2-1}-\log\left\|t+\sqrt{t^2-1}\right\|\right)+c$ $=\frac12\left\{(x+2)\sqrt{x^2+4x+3}-\log\left\|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}\right\|\right\}+c$ 〃	・(1)は公式(12)，(2)は公式(13)が用いられることに気づかない。 根号内をa^2-x^2やx^2+Aの形に変形しようとする必要性が見出せない。	・根号内を(1)のとき，$2^2-(x-1)^2$に，(2)のとき，$(x+2)^2-1$に変形すると見通しが明るい。1次式$x-1$, $x+2$をtと置換すると，公式(12), (13)が適用されることに着目できる。
EX 1.16　次の不定積分を求めよ。 (1) $\int\frac{3x+2}{(x-1)(x^2+4)}dx$ (2) $\int\frac{41x+11}{(3x-1)^2(x^2+4)}dx$ 解　部分分数に分解して，既知の不定積分の公式に帰着。公式(1), (2), (14)，また， $\int f(x)dx=F(x)+c$ のとき $\int f(ax+b)dx$ $=\frac1a F(ax+b)+c$ の適用。	◦部分分数に分解する。 (1) $\frac{3x+2}{(x-1)(x^2+4)}$ における分子は1次式，分母は3次式であるから部分分数に分解する。2次式，x^2+4は実数の範囲で1次式に因分分解されないから，このような場合には分子を1次式の形におく。 $\frac{3x+2}{(x-1)(x^2+4)}=\frac{a}{x-1}+\frac{bx+c}{x^2+4}$ とおくことができる。 (2) $\frac{41x+11}{(3x-1)^2(x^2+4)}$ における分子は1次式，分母は4次式であるから部分分数に分解する。分母がxの1次式の2乗である分数式の分子はxの1次式または定数になる。 $\frac{41x+11}{(3x-1)^2(x^2+4)}=\frac{Ax+B}{(3x-1)^2}+\frac{cx+d}{(x^2+4)}$ ここで　$\frac{Ax+B}{(3x-1)^2}=\frac{a}{(3x-1)^2}+\frac{b}{3x-1}$ とおくことができる したがって $\frac{41x+11}{(3x-1)^2(x^2+4)}=\frac{a}{(3x-1)^2}+\frac{b}{3x-1}+\frac{cx+d}{x^2+4}$ とおくことができる。	解 (1) $\int\frac{3x+2}{(x-1)(x^2+4)}dx$ $=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x}{x^2+4}+\frac{2}{x^2+4}\right)dx$ $=\int\left\{\frac{(x-1)'}{x-1}-\frac12\cdot\frac{(x^2+4)'}{x^2+4}+2\cdot\frac{1}{x^2+2^2}\right\}dx$ $=\log\|x-1\|-\frac12\log(x^2+4)+\frac22\tan^{-1}\frac{x}{2}+c$ $=\log\frac{\|x-1\|}{\sqrt{x^2+4}}+\tan^{-1}\frac{x}{2}+c$ 〃 $\frac{3x+2}{(x-1)(x^2+4)}=\frac{a}{x-1}+\frac{bx+c}{x^2+4}$ とかけたとする。 $=\frac{(a+b)x^2+(-b+c)x+4b-c}{(x-1)(x^2+4)}$ 分子の係数を比較して $\begin{cases} a+b=0 \\ -b+c=3 \\ 4b-c=2 \end{cases}$ ∴ $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=2 \end{cases}$ ∴ $\frac{3x+2}{(x-1)(x^2+4)}=\frac{1}{x-1}+\frac{-x+2}{x^2+4}$ (2) $\int\frac{41x+11}{(3x-1)^2(x^2+4)}dx$ $\int\left(\frac{6}{(3x-1)^2}+\frac{3}{3x-1}-\frac{x}{x^2+4}-\frac{1}{x^2+4}\right)dx$ $=\int\left(6(3x-1)^{-2}+\frac{(3x-1)'}{3x-1}-\frac12\cdot\frac{(x^2+4)'}{x^2+4}-\frac{1}{x^2+2^2}\right)dx$ $=-\frac{2}{3x-1}+\log\|3x-1\|-\frac12\log(x^2+4)$ $-\frac12\tan^{-1}\frac{x}{2}+c$ $=-\frac{2}{3x-1}+\log\frac{\|3x-1\|}{\sqrt{x^2+4}}-\frac12\tan^{-1}\frac{x}{2}+c$ 〃 $\frac{41x+11}{(3x-1)^2(x^2+4)}$ $=\frac{a}{(3x-1)^2}+\frac{b}{3x-1}+\frac{cx+d}{x^2+4}$ とかけたとする。 分子について $41x+11=a(x^2+4)+b(3x-1)(x^2+4)$ $+(cx+d)(3x-1)^2$ $=(3b+9c)x^3+(a-b-6c+9d)x^2$ $+(12b+c-6d)x+4a-4b+d$ 係数を比較して $\begin{cases} 3b+9c=0 \\ a-b-6c+9d=0 \\ 12b+c-6d=41 \\ 4a-4b+d=11 \end{cases}$ ∴ $\begin{cases} a=6 \\ b=3 \\ c=-1 \\ d=-1 \end{cases}$ ∴ $\frac{41x+11}{(3x-1)^2(x^2+4)}=\frac{6}{(3x-1)^2}+\frac{3}{3x-1}$ $+\frac{-x-1}{x^2+4}$	・公式(14) $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx$ $=\log\|f(x)\|+c$ は用いられない。また，部分分数に分解するとき，$\frac{3x+2}{(x-1)(x^2+4)}$ $=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x^2+4}$ とおいてミスをする。 ・$\frac{41x+11}{(3x-1)^2(x^2+4)}$ $=\frac{Ax+B}{(3x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$ とおいて部分分数に分解する。 ・不定積分 $\int\frac{6}{(3x-1)^2}dx$ は $3x-1=t$ と置換しないと解けない。	・分母が2次式のとき，分子は一般的には1次式となることに留意する。 ・$\frac{Ax+B}{(3x-1)^2}$ のように分母が1次式の累乗である分数式は，さらに $\frac{Ax+B}{(3x-1)^2}$ $=\frac{a}{(3x-1)^2}+\frac{b}{3x-1}$ と部分分数に分解できることに着目する。 ◦変形して $6\int(3x-1)^{-2}dx$ $=6\cdot\frac13\cdot\frac{1}{(-2+1)}(3x-1)^{-2+1}+c$ $=-2(3x-1)^{-1}+c$ $=-\frac{2}{3x-1}+c$

指導細案(No. 6)

問題，解法の手順	前提内容，関連事項	解法，技能，計算技術	誤り易い箇所	指導上の留意点
EX 1.17 次の不定積分を求めよ。 (1) $\int\frac{dx}{\cos x}$ (2) $\int\frac{dx}{1+\sin x}$ 解 $\sin x$, $\cos x$ の分数関数の積分はすべて $\tan\frac{x}{2}=t$ と置換する方針で解決する。	◦ $\sin x$, $\cos x$ の分数関数の積分 $\tan\frac{x}{2}=t$ とおくと $x=2\tan^{-1}t,\ dx=\frac{2}{1+t^2}dt$ $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$ $\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1=\frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}}-1=\frac{2}{1+t^2}-1=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ $1+\cos x=1+\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{2}{1+t^2},\ 1-\cos x=1-\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{2t^2}{1+t^2}$ で あるから $t=\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}$ 〔別解〕 (1) $\int\frac{dt}{\cos x}=\int\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx$ $\sin x=t$ とおくと，$\cos x\,dx=dt$ $\therefore\int\frac{dt}{\cos x}=\int\frac{dt}{1-t^2}=-\int\frac{dt}{t^2-1}=-\frac{1}{2}\log\left\lvert\frac{t-1}{t+1}\right\rvert+c$ $=\frac{1}{2}\log\left\lvert\frac{t+1}{t-1}\right\rvert+c=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)+c$	解 $\tan\frac{x}{2}=t$…①とおく。$dx=\frac{2}{1+t^2}dt$ …② (1) $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$…③，②，③を与式に代入 $\int\frac{1}{\cos x}dt=\int\frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=2\int\frac{dt}{1-t^2}=-2\int\frac{dt}{t^2-1}$ $=-2\cdot\frac{1}{2}\log\left\lvert\frac{t-1}{t+1}\right\rvert+c=\log\left\lvert\frac{t+1}{t-1}\right\rvert+c$ $=\log\left\lvert\frac{\tan\frac{x}{2}+1}{\tan\frac{x}{2}-1}\right\rvert+c$ 〃 (2) $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$…③，②，③を与式に代入 $\int\frac{dx}{1+\sin x}=\int\frac{1+t^2}{(1+t)^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=2\int(1+t)^{-2}dt=-\frac{2}{1+t}+c$ $=-\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}+c$ 〃	・(1)では $\frac{1}{\cos x}=\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}$ (2)では $\frac{1}{1+\sin x}=\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}$ と変形して，置換積分を用いて解く。 〔別解〕 (2) $\int\frac{dx}{1+\sin x}=\int\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx$ $=\int\frac{dx}{\cos^2 x}-\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$ $=\tan x+\int\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x}dx$ $=\tan x-\frac{1}{\cos x}+c$	(1) $\frac{1}{\cos x}$ の分母，分子に $\cos x$ をかけて， $\frac{\cos x}{\cos^2 x}=\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}$ $\sin x=t$ と置換する。 (2) $\frac{1}{1+\sin x}$ の分母，分子に $1-\sin x$ をかけて， $\frac{1-\sin t}{1-\sin^2 x}=\frac{1-\sin t}{\cos^2 x}$ $=\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\sin x}{\cos^2 x}$ $\frac{\sin x}{\cos^2 x}$ の積分には $\cos x=t$ と置換する。
EX 1.18 次の不定積分を求めよ。 (1) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$ (2) $1<x<3$ のとき (i) $\int\sqrt{\frac{x-1}{3-x}}dx$ (ii) $\int\sqrt{(x-1)(3-x)}\,dx$ (3) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$ 解 無理関数の積分 置換積分法の適用 (1) $\sqrt{x+1}=t$ とおく。 (2) (i) $\sqrt{\frac{x-1}{3-x}}=t$ とおく。 (ii) $\sqrt{(x-1)(3-x)}$ $=(3-x)\sqrt{\frac{x-1}{3-x}}$ 変形後 $\sqrt{\frac{x-1}{3-x}}=t$ とおく。 (3) $\sqrt{x^2-4}=t-x$ とおく。	◦ 無理関数の積分 (1) $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ を含む式の積分 ($ad-bc\neq0$, nは 0 でない整数) $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t$ すなわち $\frac{ax+b}{cx+d}=t^n$ とおく。 (2) $\sqrt{ax^2+bx+c}$ を含む式の積分 ($a\neq0$) (i) $a>0$ のとき $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}\,x$ とおく。 (ii) $a<0$，方程式 $ax^2+bx+c=0$ が 2 つの実数解 α, β $(\alpha<\beta)$ をもつとき $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ $\alpha<x<\beta$ のとき $ax^2+bx+c>0$ $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{-a}\,(\beta-x)\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}$ (1)に帰着 $\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}=t$ とおく。 **解法，技能，計算技術** 解 (3) $\sqrt{x^2-4}=t-x$ …①とおく。 $x^2-4=t^2-2tx+x^2$ $\therefore$ $x=\frac{t^2+4}{2t}$ …② $dx=\frac{2t^2-(t^2+4)}{2t^2}dt=\frac{t^2-4}{2t^2}dt$ …③ $\sqrt{x^2-4}=t-\frac{t^2+4}{2t}=\frac{t^2-4}{2t}$ …④，②～④を与式に代入 $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}=\int\frac{2t}{t^2+4}\cdot\frac{2t}{t^2-4}\cdot\frac{t^2-4}{2t^2}dt=\int\frac{2}{t^2+4}dt=2\int\frac{dt}{t^2+2^2}$ $=2\cdot\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{t}{2}+c=\tan^{-1}\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}+c$	解 (1) $\sqrt{x+1}=t$ …①とおく。$x=t^2-1$ …②，$dx=2tdt$ …③ ①～③を与式に代入 $\int\frac{dx}{x\sqrt{x+1}}=\int\frac{2t}{(t^2-1)t}dt=2\int\frac{dt}{t^2-1}=2\cdot\frac{1}{2}\log\left\lvert\frac{t-1}{t+1}\right\rvert+c$ $=\log\left\lvert\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right\rvert+c$ 〃 (2) (i) $\sqrt{\frac{x-1}{3-x}}=t$ をおく。$\frac{x-1}{3-x}=t^2$ …② $x=\frac{3t^2+1}{t^2+1}$ $dx=\frac{6t(t^2+1)-2t(3t^2+1)}{(t^2+1)^2}dt=\frac{4t}{(t^2+1)^2}dt$…③ ①，③を与式に代入 $\int\sqrt{\frac{x-1}{3+x}}dx=\int t\cdot\frac{4t}{(t^2+1)^2}dt=2\int t\cdot\frac{2t}{(t^2+1)^2}dt$ $\boxed{\begin{array}{ll} f=t & g'=\frac{2t}{(t^2+1)^2}\\ f'=1 & g=-\frac{1}{(t^2+1)}\end{array}}$ $=2\left(-\frac{t}{t^2+1}+\int\frac{dt}{t^2+1}\right)=-\frac{2}{\frac{x-1}{3-x}+1}\cdot\sqrt{\frac{1-x}{3-x}}+2\tan^{-1}t+c$ $=-\sqrt{(x-1)(3-x)}+2\tan^{-1}\sqrt{\frac{x-1}{3-x}}+c$ 〃 (ii) $\sqrt{(x-1)(3-x)}=(3-x)\sqrt{\frac{x-1}{3-x}}$ (i)と同様の変数 t をとる。 $3-x=3-\frac{1+3t^2}{t^2+1}=\frac{2}{t^2+1}$ 与式 $=\int(3-x)\sqrt{\frac{x-1}{3-x}}dt=\int\frac{2}{t^2+1}\cdot t\cdot\frac{4t}{(t^2+1)^2}dt$ $\boxed{\begin{array}{ll} f=t & g'=\frac{4t}{(t^2+1)^3}\\ f'=1 & g=-\frac{1}{(t^2+1)^2}\end{array}}$ $=2\int t\cdot\frac{4t}{(t^2+1)^3}dt$ $=2\left\{-\frac{t}{(t^2+1)^2}+\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}\right\}=2\left\{-\frac{t}{(t^2+1)^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{t}{t^2+1}+\tan^{-1}t\right)\right\}+c$ $=\frac{1}{2}(x-2)\sqrt{(x-1)(3-x)}+\tan^{-1}\sqrt{\frac{x-1}{3-x}}+c$ 〃 $\left(\begin{array}{l}\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}=\int\frac{t^2+1-t^2}{(t^2+1)^2}dt=\int\frac{dt}{t^2+1}-\int\frac{t^2}{(t^2+1)^2}dt\\ =\tan^{-1}t+\frac{t}{t^2+1}-\frac{1}{2}\tan^{-1}t+c=\frac{1}{2}\left(\frac{t}{t^2+1}+\tan^{-1}t\right)+c\end{array}\right)$	・根号内の $x+1=t$ とおくと積分できる形に変形できない。 $\sqrt{\frac{x-1}{3-x}}=t$ とおく方針に合せる。しかし，dx を dt を用いて表すときミスをする。 ・$\int\frac{2t^2}{(t^2+1)^2}dt$ を求めるとき部分積分法を用いることを気付かない。 ・$\sqrt{(x-1)(3-x)}$ $=(3-x)\sqrt{\frac{x-1}{3-x}}$ 変形後， $\sqrt{\frac{x-1}{3-x}}=t$ とおく方針に合せる。計算では途中の $\int\frac{4t^2}{(t^2+1)^3}dt$ や $\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}$ の求め方に難しさを感じる。 ・$\sqrt{x^2-4}=t-x$ とおく方針に合せる。変数変換が終えないで積分しようとする。	・根号も含めて $\sqrt{x+1}=t$ とおくと既知の公式が適用できる。 ・$\sqrt{\frac{x-1}{3-x}}=t$ そのまま微分して dx を dt で表すより，両辺を平方して，x について解き，t で表した後に微分して dx を dt で表すと確実である。 ・$\int t\cdot\left(-\frac{1}{t^2+1}\right)'dt$ と見なして部分積分法を用いる。 ・次の 2 点に留意して求める。 (1)置換したとき，変数変換を確実にする。 (2) $\int\frac{4t^2}{(t^2+1)^3}dt$ の求め方は (i)の $\int\frac{2t^2}{(t^2+1)^2}dt$ に準じる。 また， $\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}=\int\frac{t^2+1-t^2}{(t^2+1)^2}dt$ $=\int\left\{\frac{1}{t^2+1}-\frac{t^2}{(t^2+1)^2}\right\}dt$ とみて不定積分する。 ・$x=\frac{t^2+4}{2t}$ のとき $\sqrt{x^2-4}$ $=t-x=t-\frac{t^2+4}{2t}=\frac{t^2-4}{2t}$ として，x を t に変換しておく。

指導細案(No. 7)

問題，解法の手順	前提内容，関連事項	解法，技能，計算技術	誤り易い箇所	指導上の留意点
EX 1.19 次の不定積分を求めよ。 (1) $\int\frac{x}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$ (2) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$ $(x>0)$ 解 根号内について (1)はa^2-x^2の形に変形可能 (2)はa^2+x^2の形 したがって，置換積分法 (1)は$x=a\sin\theta$ (2)は$x=a\tan\theta$	◦無理関数の積分（つづき） (3) 無理関数の部分を次の形 ($a>0$) に変形できるとき $\sqrt{a^2-x^2}$ のとき，$x=a\sin\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$ $\sqrt{a^2+x^2}$ のとき，$x=a\tan\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ と置換することにより，三角関数の既知の積分に帰着する。 別解 (2) $\sqrt{x^2+1}=t-x$…①とおく。 $x^2+1=t^2-2tx+x^2$ ∴ $x=\frac{t^2-1}{2t}$…② $dx=\frac{2t^2-(t^2-1)}{2t^2}dt=\frac{t^2+1}{2t^2}dt$…③, $\sqrt{x^2+1}=t-\frac{t^2-1}{2t}=\frac{t^2+1}{2t}$…④ ②〜④を与式に代入 $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{4t^2}{(t^2-1)^2}\cdot\frac{2t}{t^2+1}\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}dt=\int\frac{4t}{(t^2-1)^2}dt$ $=2\int\frac{(t^2-1)'}{(t^2-1)^2}dt=-\frac{2}{t^2-1}+c$ ①より$t=\sqrt{x^2+1}+x$であるから 与式 $=-\frac{2}{(x+\sqrt{x^2+1})^2-1}+c=-\frac{1}{x(\sqrt{x^2+1}+x)}+c$	解 (1) $3+2x-x^2=-(x^2-2x)+3=-(x-1)^2+4=2^2-(x-1)^2$ $x-1=2\sin\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$…①とおく。$x=2\sin\theta+1$…② $dx=2\cos\theta d\theta$…③, $\sqrt{3+2x-x^2}=2\sqrt{1-\sin^2\theta}=2\cos\theta$…④ ②〜④を与式に代入 $\int\frac{x}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx=\int\frac{2\sin\theta+1}{2\cos\theta}2\cos\theta d\theta=\int(2\sin\theta+1)d\theta=\theta-2\cos\theta+c$ $=\sin^{-1}\frac{x-1}{2}-\sqrt{3+2x-x^2}+c$ 〃 (2) $x=\tan\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$…①とおく。$dx=\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$…②, $\sqrt{x^2+1}=\sqrt{\tan^2\theta+1}=\frac{1}{\cos\theta}$ …③, ①〜③を与式へ代入 $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{\cos\theta}{\tan^2\theta\cos^2\theta}d\theta=\int\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta=\int\frac{(\sin\theta)'}{\sin^2\theta}d\theta=-\frac{1}{\sin\theta}+c$ ①, ③より $\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ であるから 与式 $=-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}+c$ 〃	・$(3+2x-x^2)'=-2x+2$に着目した不定積分として計算する。分子を $x=-\frac{1}{2}(-2x+2-2)=-\frac{1}{2}(-2x+2)+1$ のような変形に難しさを感じる。 ・EX1.18 (3)で解いた方法を用いて$\sqrt{x^2+1}=t-x$に着目した置換積分法により計算する。xをtに変換するとき複雑になりミスをしがちである。	・与式 $=-\frac{1}{2}\int\frac{-2x+2-2}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$ $=-\frac{1}{2}\int\frac{(3+2x-x^2)'}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ $+\int\frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ $=-\sqrt{3+2x-x^2}$ $+\int\frac{dx}{\sqrt{2^2-(x-1)^2}}$ $=-\sqrt{3+2x-x^2}$ $+\sin^{-1}\frac{x-1}{2}+c$となる。 ここでは変形後 $x-1=2\sin\theta$とおく置換積分法を用いて解けることを示す。 ・x, $\sqrt{x^2+1}$, dxを確実にtで表すことに留意する。
EX2.1 次の定積分の値を求めよ。 (1) $\int_{-2}^{1}x^2dx$ (2) $\int_1^2\sqrt{x}\,dx$ (3) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta$ (4) $\int_0^3 2^t dt$ 解 不定積分の公式と定積分の定義の適用。	◦面積と定積分 関数$f(x)$は$[a, b]$で連続，$y=f(x)\ge0$のとき，$y=f(x)$とx軸，2直線$x=a$, $x=b$で囲まれた図形の面積を求めよ。  解 点x ($a\le x\le b$)をとる。右図の如く$y=f(x)$とx軸に挟まれる斜線の部分の面積を$S(x)$とする。 xの増分$\triangle x$に対応する$S(x)$の部分を$\triangle S$とすると $\triangle S=S(x+\triangle x)-S(x)$ (右上図のアミかけ部分の面積) 点C ($x\le c\le x+\triangle x$)をとれば $\triangle S=f(c)\triangle x$ ∴ $\frac{\triangle S}{\triangle x}=f(c)$ $\triangle x\to0$のとき，$c\to x$, $f(x)$は連続であるから $\frac{dS}{dx}=\lim_{\triangle x\to0}\frac{\triangle S}{\triangle x}=\lim_{c\to x}f(c)=f(x)$ ∴ $S'(x)=f(x)$ $S(x)$は$f(x)$の不定積分 $F(x)$を$f(x)$の1つの不定積分とすると $S(x)=F(x)+c$ (cは定数) $S(x)$の定義より$S(a)=0$であるから，上の式で$x=a$とおくと $0=F(a)+c$, ∴ $c=-F(a)$ ∴ $S(x)=F(x)-F(a)$ $x=b$とおくと求める面積Sを得る。 ∴ $S=S(b)=F(b)-F(a)$ ただし，$F(x)=\int f(x)dx$	解 (1) $\int_{-2}^1x^2dx=\frac{1}{3}[x^3]_{-2}^1=\frac{1}{3}\{1^3-(-2)^3\}=\frac{1}{3}(1+8)=3$ 〃 (2) $\int_1^2\sqrt{x}\,dx=\int_1^2x^{\frac12}dx=\left[\frac{1}{\frac12+1}x^{\frac12+1}\right]_1^2=\frac23\left[x^{\frac32}\right]_1^2=\frac23\left(2^{\frac32}-1^{\frac32}\right)=\frac23(2\sqrt2-1)$ 〃 (3) $\int_{\frac\pi6}^{\frac\pi2}\cos\theta d\theta=[\sin\theta]_{\frac\pi6}^{\frac\pi2}=\sin\frac\pi2-\sin\frac\pi6=1-\frac12=\frac12$ 〃 (4) $\int_0^3 2^tdt=\frac{1}{\log2}[2^t]_0^3=\frac{1}{\log2}(2^3-2^0)=\frac{1}{\log2}(8-1)=\frac{7}{\log2}$ 〃	・$\int_{-2}^1x^2dx=\left[\frac13x^3\right]_{-2}^1$として係数$\frac13$を含めて計算する。 ・$2^{\frac32}$がうまく処理できない。 ・三角関数の値がきちんととれない。 ・$\int_0^32^tdt=\left[\frac{2^t}{\log2}\right]_0^3$として$\frac{1}{\log2}$を含めて計算する。	・$\int_{-2}^1x^2dx=\frac13[x^3]_{-2}^1$のように係数と変数を切り離して計算すると手際よく，正確にできる。 ・指数 $\frac32=1+\frac12$ とみて $2^{\frac32}=2^{1+\frac12}=2^1\cdot2^{\frac12}=2\sqrt2$ とする。 ・単位円を用い，$\sin\theta$の値はy座標であることを想起する。 ・$\int_0^32^tdt=\frac{1}{\log2}[2^t]_0^3$として$\frac{1}{\log2}$を前に出して計算する。
EX 2.2 次の定積分の値を求めよ。 (1) $\int_{-1}^3(-x^2+5x-3)dx$ (2) $\int_1^e\frac{3x+1}{x^2}dx$ (3) $\int_0^1(e^{-x}+3e^{2x})dx$ (4) $\int_{\frac\pi6}^{\frac\pi3}\cos^2xdx$ 解 和や差，実数倍の不定積分は求められることに着目，あるいは定積分の性質を用いてから不定積分の公式を適用。	◦定積分の定義 関数$f(x)$が連続，$F(x)=\int f(x)dx$のとき，$F(b)-F(a)$を，$f(x)$のaからbまでの積分(定積分)といい， 記号$\int_a^bf(x)dx=[F(x)]_a^b$で表す。 $\int_a^bf(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$，ただし，$F(x)=\int f(x)dx$	解 (1) $\int_{-1}^3(-x^2+5x-3)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac52x^2-3x\right]_{-1}^3=\left(-\frac{3^3}{3}+\frac52 3^2-3\cdot3\right)$ $-\left\{-\frac{(-1)^3}{3}+\frac52(-1)^2-3(-1)\right\}=-\frac13(27+1)+\frac52(9-1)-3(3+1)$ $=-\frac{28}{3}+20-12=-\frac{28}{3}+\frac{24}{3}=-\frac43$ 〃 (2) $\int_1^e\frac{3x+1}{x^2}dx=\int_1^e\left(\frac3x+x^{-2}\right)dx=\left[3\log\lvert x\rvert-\frac1x\right]_1^e=3\log e-\frac1e-(3\log1-1)$ $=3-\frac1e+1=4-\frac1e$ 〃 (3) $\int_0^1(e^{-x}+3e^{2x})dx=\left[-e^{-x}+\frac32e^{2x}\right]_0^1=\left(-e^{-1}+\frac32e^2\right)-\left(-e^0+\frac32e^0\right)$ $=-\frac1e+\frac32e^2-\left(-1+\frac32\right)=-\frac1e+\frac32e^2-\frac12$ 〃 (4) $\int_{\frac\pi6}^{\frac\pi3}\cos^2xdx=\frac12\int_{\frac\pi6}^{\frac\pi3}(1+\cos2x)dx=\frac12\left[x+\frac12\sin2x\right]_{\frac\pi6}^{\frac\pi3}$ $=\frac12\left\{\frac\pi3+\frac12\sin\frac{2\pi}{3}-\left(\frac\pi6+\frac12\sin\frac\pi3\right)\right\}=\frac12\left(\frac\pi3-\frac\pi6\right)=\frac{\pi}{12}$ 〃	・$-x^2+5x-3$の不定積分が正確にとれない。 ・$\frac{3x+1}{x^2}$はそのままでは積分できない。 ・e^{-x}やe^{2x}の不定積分が怪しい。 ・$\cos^2x$はそのままでは積分できない	・$-\int_{-1}^3x^2dx+5\int_{-1}^3xdx$ $-3\int_{-1}^3dx$として計算る。 ・仮分数式を帯分数式に変形してから積分する。 ・$\int f(x)dx=F(x)+c$ のとき，$\int f(ax+b)dx$ $=\frac1aF(ax+b)+c$ の適用もしくは，$-x$ や $2x=t$と置換して求める。 ・半角公式 $\cos^2x=\frac{1+\cos2x}{2}$を用いて変形してから積分する。

指導細案(No. 8)

<table>
<tr><th>問題，解法の手順</th><th>前提内容，関連事項</th><th>解法，技能，計算技術</th><th>誤り易い箇所</th><th>指導上の留意点</th></tr>
<tr>
<td rowspan="2">EX 2.3　次の定積分の値を求めよ。
(1) $\int_1^2 (2x-3)^4 dx$
(2) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{4-x}}dx$
(3) $\int_1^e \frac{\log x}{x}dx$
(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{x+\cos x}dx$
解　置換積分法の適用，または
(1) $\int f(x)dx = F(x)+c$
のとき $\int f(ax+b)dx$
$=\frac{1}{a}F(ax+b)+c$
(3) $\int f(g(x))g'(x)dx$
$=\int f(t)dt$
(4) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$
$=\log\lvert f(x)\rvert+c$
より不定積分を求めてから計算。</td>
<td>◦定積分の性質　　h, kを定数とする。
(1) $\int_a^a f(x)dx=0$　　(2) $\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$
(3) $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$
(4) $\int_a^b \{f(x)\pm g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$（複号同順）
(3),(4)をまとめて
$\int_a^b \{hf(x)+kg(x)\}dx=h\int_a^b f(x)dx+k\int_a^b g(x)dx$
(5) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

◦定積分の置換積分法

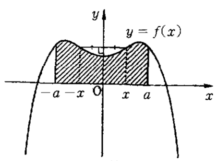
(1) $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$
ただし，$x=g(t)$, $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$

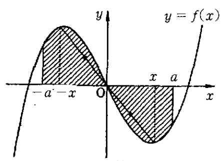
〔証〕$F(x)=\int f(x)dx$とする。
不定積分の置換積分法の公式により
$F(g(t))=\int f(g(t))g'(t)dt$
よって
$\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=[F(g(t))]_\alpha^\beta=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$（終）</td>
<td rowspan="2">解　(1) $2x-3=t$…①とおく。$2dx=dt$ ∴ $dx=\frac{1}{2}dt$…②
$\begin{array}{c|c} x & 1 \to 2 \\ \hline t & -1 \to 1 \end{array}$…③，①～③を与式に代入
与式$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}t^4dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\left[t^5\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{10}\{1^5-(-1)^5\}=\frac{1}{10}\cdot 2=\frac{1}{5}$ 〃
(2) $4-x=t$…①とおく。$x=4-t$…②　$dx=-dt$…③　$\begin{array}{c|c} x & 0 \to 3 \\ \hline t & 4 \to 1 \end{array}$…④，①～④を与式に代入
与式$=-\int_4^1 \frac{4-t}{\sqrt{t}}dt=\int_1^4 (4t^{-\frac{1}{2}}-t^{\frac{1}{2}})dt=\left[4\cdot 2t^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^4=\left[8\sqrt{t}-\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_1^4$
$=8\cdot 2-\frac{2}{3}4\cdot 2-\left(8-\frac{2}{3}\right)=8(2-1)-\frac{2}{3}(8-1)=8-\frac{14}{3}=\frac{10}{3}$ 〃
(3) $\log x=t$…①とおく。$\frac{1}{x}dx=dt$…②
$\begin{array}{c|c} x & 1 \to e \\ \hline t & 0 \to 1 \end{array}$…③，①～③を与式に代入，　与式$=\int_0^1 tdt=\frac{1}{2}\left[t^2\right]_0^1=\frac{1}{2}$ 〃
(4) $x+\cos x=t$…①とおく。$(1-\sin x)dx=dt$…②，$\begin{array}{c|c} x & 0 \to \frac{\pi}{2} \\ \hline t & 1 \to \frac{\pi}{2} \end{array}$…③
与式$=\int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{t}=\left[\log\lvert t\rvert\right]_1^{\frac{\pi}{2}}=\log\frac{\pi}{2}-\log 1=\log\frac{\pi}{2}$ 〃</td>
<td rowspan="2">・不定積分を置換積分法を用いて解く方法については(1),(3),(4)はtに変換するのは容易であるが(2)についてxをtに変換することを忘れる。
・積分区間の変更を忘れる。
・(2)について
〔別解〕
$\sqrt{4-x}=t$…①とおく。$4-x=t^2$
∴ $x=4-t^2$…②，$dx=-2tdt$…③
$\begin{array}{c|c} x & 0 \to 3 \\ \hline t & 2 \to 1 \end{array}$…④，
①～④を与式に代入。
与式
$=-2\int_2^1 \frac{4-t^2}{t}tdt=2\int_1^2(4-t^2)dt$
$=2\left[4t-\frac{1}{3}t^3\right]_1^2=2\left\{8-\frac{8}{3}-\left(4-\frac{1}{3}\right)\right\}$
$=\frac{10}{3}$ 〃</td>
<td rowspan="2">・$4-x=t$のとき$x=4-t$と解いて，xはtに関する関数であることに留意する。

・不定積分を公式により求める方法を用いると
(1)与式
$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\left[(2x-3)^5\right]_1^2=\frac{1}{5}$ 〃
(3)与式$=\frac{1}{2}\left[(\log x)^2\right]_1^e=\frac{1}{2}$ 〃
(4)与式
$=\left[\log\lvert x+\cos x\rvert\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\log\frac{\pi}{2}$ 〃

積分区間の変更は不要である利点がある。</td>
</tr>
<tr><td></td></tr>
<tr>
<td>EX2.4　次の定積分の値を求めよ。
(1) $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$
(2) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+3}$
解　不定積分の公式を適用して計算，または置換積分法の適用。</td>
<td>(2) $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx=\int_\alpha^\beta f(t)dt$，ただし，$g(x)=t$, $g(a)=\alpha$, $g(b)=\beta$

〔証〕置換積分法の公式(1)において　$g(\alpha)=a$, $g(\beta)=b$であるから変数xとtを入れ換えると　$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx=\int_\alpha^\beta f(t)dt$（終）
○ 不定積分の公式(9),(10)
(9) $\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+c$　　(10) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\sin^{-1}\frac{x}{a}+c$
○ 置換積分法のt以外の関数で置換する。
(1) $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$, $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$の形のとき，$x=a\sin\theta$と置換する。
(2) $\int\frac{dx}{a^2+x^2}$の形のとき，$x=a\tan\theta$と置換する。</td>
<td>解　(1) $\int_1^{\sqrt{2}}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\left[\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_1^{\sqrt{2}}=\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}-\sin^{-1}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$ 〃
〔別解〕$x=2\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$…①とおく。$dx=2\cos\theta d\theta$…②
$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}=2\sqrt{\cos^2\theta}=2\cos\theta$…③，$\begin{array}{c|c} x & 1 \to \sqrt{2} \\ \hline \theta & \frac{\pi}{6} \to \frac{\pi}{4} \end{array}$…④
②～④を与式に代入
与式$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\cos\theta}{2\cos\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\left[\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$ 〃
(2) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+3}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}\right]_1^{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\tan^{-1}1-\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{36}$ 〃
〔別解〕$x=\sqrt{3}\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$…①とおく。$dx=\frac{\sqrt{3}\,d\theta}{\cos^2\theta}$…②
$x^2+3=3(\tan^2\theta+1)=\frac{3}{\cos^2\theta}$…③　$\begin{array}{c|c} x & 1 \to \sqrt{3} \\ \hline \theta & \frac{\pi}{6} \to \frac{\pi}{4} \end{array}$…④，
②～④を与式に代入
与式$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2\theta}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\left[\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{36}$ 〃</td>
<td>・$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sin^{-1}\frac{x}{a}+c$や
$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+c$のとき，
$\sin^{-1}x$, $\tan^{-1}x$の値がうまくとれない。

・(1)では$x=2\sin\theta$，(2)では$x=\sqrt{3}\tan\theta$と置換するとき，ともにxをθに変数変換をしなくてはいけない。(1)の$\sqrt{4-x^2}$ (2)のx^2+3をθに変換しないで計算する。</td>
<td>・逆三角関数の定義にもどる。
(1) $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}=x$
$\left(-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$とおくと
$\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}$　∴ $x=\frac{\pi}{4}$
(2) $\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}=x$
$\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$とおくと
$\tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}$　∴ $x=\frac{\pi}{6}$
・(1)の$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4\sin^2\theta}$
$=2\sqrt{1-\sin^2\theta}=2\sqrt{\cos^2\theta}$
$=2\cos\theta$，(2)の
$x^2+3=3(\tan^2\theta+1)=\frac{3}{\cos^2\theta}$
のように被積分関数もθの関数に変換して計算する。</td>
</tr>
<tr>
<td>EX 2.5　連続な関数$f(x)$について次のことを証明せよ。
(1)(i) $f(x)$が偶関数ならば
$\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$
(ii) $f(x)$が奇関数ならば
$\int_{-a}^a f(x)dx=0$
(2) 次の定積分の値を求めよ。
(i) $\int_{-2}^{2}(x^5-x^3+3x^2+5x-2)dx$
(ii) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\sin x+\cos x)dx$
証　(1)定積分の性質(5)，置換積分法，(1)を利用して(2)を解く。</td>
<td>◦偶関数と奇関数の定積分 → 計算の簡易化
$\int_{-a}^a f(x)dx=\begin{cases}2\int_0^a f(x)dx & (f(x)\text{が偶関数のとき}) \\ 0 & (f(x)\text{が奇関数のとき})\end{cases}$
◦定積分の性質
(5) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$


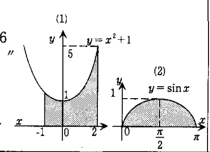
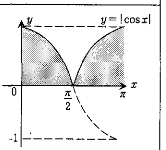
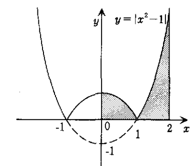
偶関数


奇関数</td>
<td>証　(1)(i) 定積分の性質より　$\int_{-a}^a f(x)dx=\int_{-a}^0 f(x)dx+\int_0^a f(x)dx$
右辺の第1項において，$x=-t$とおくと，$dx=-dt$, $f(x)$は偶関数であるから
$f(-t)=f(t)$, $\begin{array}{c|c} x & -a \to 0 \\ \hline t & a \to 0 \end{array}$
$\int_{-a}^0 f(x)dx=-\int_a^0 f(-t)dt=\int_0^a f(-t)dt=\int_0^a f(t)dt$
∴ $\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$
(ii) $f(x)$は奇関数であるから　$f(-t)=-f(t)$　(i)と同様にして
$\int_{-a}^0 f(x)dx=-\int_a^0 f(-t)dt=\int_0^a f(-t)dt=-\int_0^a f(t)dt$ ∴ $\int_{-a}^a f(x)dx=0$（終）
解　(2)(i) 与式$=2\int_0^2(3x^2-2)dx=2\left[x^3-2x\right]_0^2=2(8-4)=8$ 〃
(ii) 与式$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos xdx=-2\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=-2\left(\sin\frac{\pi}{4}-\sin 0\right)=-\sqrt{2}$ 〃</td>
<td>・定積分の性質(5)を利用すること，さらに$x=-t$と置換することに気づかない。

・偶関数，奇関数の定義をきちんと用いられない。

・$\int_{-a}^a f(x)dx=\begin{cases}2\int_0^a f(x)dx \\ 0\end{cases}$
をすぐに利用しないで，順番に積分して値を求めようとする。</td>
<td>・$\int_{-a}^a f(x)dx=\int_{-a}^0 f(x)$
$+\int_0^a f(x)dx$が成り立つことに着目し，
$\int_{-a}^0 f(x)dx$は，偶関数のとき$\int_0^a f(x)dx$，奇関数のとき$-\int_0^a f(x)dx$に等しいことを示すために$x=-t$と置換する。
・偶は$f(-x)=f(x)$，奇は$f(-x)=-f(x)$を変形時にきちんと利用する。
・「偶は2倍，奇は捨てる。」この覚え方で身につけさせて，x^5, x^3, x, $\sin x$は奇だから捨てさせる。</td>
</tr>
</table>

指導細案(No. 9)

問題，解法の手順	前提内容，関連事項	解法，技能，計算技術	誤り易い箇所	指導上の留意点
EX 2.6 次の定積分の値を求めよ。 (1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin 2x dx$ (2) $\int_0^1 \tan^{-1}x dx$ 解 部分積分法の適用	◦定積分の部分積分法 $\int_a^b f(x)g'(x)dx=[f(x)g(x)]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$ 〔証〕不定積分の部分積分法の公式 $\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$ から上記の公式が導かれる。（終） ◦fにとるものの順番 1. 対数関数，2. 整関数，3. 三角関数・指数関数	解 (1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin 2x dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x(-\frac{1}{2}\cos 2x)'dx$ $=-\frac{1}{2}[x\cos 2x]_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x dx$ $=-\frac{1}{2}[\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2}-0]+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}[\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{4}(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0)=\frac{1}{4}$ 〃 $\boxed{f=x \quad g'=\sin 2x \\ f'=1 \quad g=-\frac{1}{2}\cos 2x}$ (2) $\int_0^1 \tan^{-1}x dx=\int_0^1 (x)'\tan^{-1}x dx$ $=[x\tan^{-1}x]_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx$ $=(\tan^{-1}1-0)-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}[\log(1+x^2)]_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2$ 〃 $\boxed{f=\tan^{-1}x \quad g'=1 \\ f'=\frac{1}{1+x^2} \quad g=x}$	・f，gのとり方は身についてきているが，計算で難点となるのは (1)では$\int\sin 2x dx$ (2)では$\int\frac{x}{1+x^2}dx$	・xと$\sin 2x$のときは$f=x$，$g'=\sin 2x$，$\tan^{-1}x$と1のときは$f=\tan^{-1}x$，$g'=1$とることは容易である。 $\int\sin(ax+b)dx$ $=-\frac{1}{a}\cos ax+c$，$\int\frac{x}{1+x^2}dx$ $=\frac{1}{2}\int\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}dx$ $=\frac{1}{2}\log(1+x^2)+c$のように不定積分の公式を用いる。
EX 2.7 nを0以上の整数とするとき，次の等式を証明せよ。 (1)(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx$ (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx$ $=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} & (n:偶数)\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 & (n:奇数)\end{cases}$ (2) 次の値を求めよ。 (i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x dx$ (ii) $\int_0^{\pi}\sin^5 x dx$ 〔証〕 (1)(i)三角関数の関係式を用いて変形，置換積分法の適用 (ii) $\sin^n x=\sin^{n-1}x\times\sin x$と見て部分積分法の適用 (1)を利用して(2)を解く	◦ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx$の証明について 〔別証〕$x=\frac{\pi}{2}-t$ …①とおく。$\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos t$ …② $dx=-dt$ …③，$\begin{array}{c\|c} x & 0\to\frac{\pi}{2}\\ \hline t & \frac{\pi}{2}\to 0\end{array}$ …④，②〜④を代入して $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\cos^n t dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx$ （終） ◦ウォリスの公式 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} & (nが偶数のとき)\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 & (nが奇数のとき)\end{cases}$ ・三角関数(正弦・余弦)の高次の形の0から$\frac{\pi}{2}$までの定積分の値は，不定積分が求められなくても，求めることができる。→2 (i) ・積分区間が$[0, \pi]$のときであっても，$x=\frac{\pi}{2}$に関して対称性を有するときは，$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$の積分区間の定積分に帰着してその定積分の値を求めることができる。→(2) (ii)	〔証〕(1)(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(\frac{\pi}{2}-x)dx$，$\frac{\pi}{2}-x=t$とおくと $dx=-dt$，$\begin{array}{c\|c} x & 0\to\frac{\pi}{2}\\ \hline t & \frac{\pi}{2}\to 0\end{array}$，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\cos^n t dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t dt$ よって $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx$ (ii) $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n dx$とする。$n=0$，$n=1$のとき $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=[x]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$，$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=-[\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$ $n\geqq 2$のとき $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x(-\cos x)'dx$ $=[-\sin^{n-1}x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x dx$ $=0+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)dx$ $=(n-1)(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx)$ $=(n-1)(I_{n-2}-I_n)$ ∴$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$ $\boxed{f=\sin^{n-1}x \quad g'=\sin x \\ f'=(n-1)\sin^{n-2}x\cos x \quad g=-\cos x}$ よって $\begin{cases} nが偶数の時 & I_n=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\\ nが奇数の時 & I_n=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1\end{cases}$ （終） 解(2)(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x dx=I_4=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{16}\pi$ 〃 (ii) $x=\frac{\pi}{2}$に関して対称であるから$\int_0^{\pi}\cos^5 x dx=2I_5=2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{16}{15}$ 〃	・$\sin x$を$\cos x$に変換する公式が見当らない。また，〔別解〕の発想も思いつかない。 ・$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\cdot\sin x dx$と見て，部分積分法を適用して解く着想は難しい。 ・nが偶数のときと奇数のときに分ける必要性が見当らない。 ・$x=\frac{\pi}{2}$に関して対称は気づかない。 ・$I_5=\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot I_1$，$I_1=1$でミスはないが，$I_4=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot I_0$ $I_0=\frac{\pi}{2}$を忘れる。	・直角三角形の図形に着目して，$\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin x$を用いて変換する。この変換に着目すれば$x=\frac{\pi}{2}-t$と置換する発想も自然なものと受取ることができる。 ・高次の形の積分は一度には計算できないため，部分積分法を用いて次数を下げる手法を用いる。 $I_n=(n-1)(I_{n-2}-I_n)$という漸化式が与えられて，I_nがI_{n-2}で表される。 ・漸化式$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$が導かれたとき，一番最後の項のI_0，I_1の違いからnが偶数と奇数に分ける必要性に気づく。 ・$y=\sin^5 x$のグラフをかくと$x=\frac{\pi}{2}$で対称に気づく。与式$=2I_5$となる。 ・一番最後の項$I_0=\frac{\pi}{2}$，$I_1=1$をかき上げた形で暗記する。
EX 2.8 次の曲線で囲まれた図形の面積Sを求めよ。 (1) 曲線$y=x^2+1$，x軸，直線$x=-1$，$x=2$ (2)曲線 $y=\sin x(0\leqq x\leqq\pi)$，$x$軸 解 定積分の定義から求める。	◦面積と定積分…関数$f(x)$は$[a, b]$で連続，$y=f(x)\geqq 0$のとき$y=f(x)$とx軸，2直線$x=a$，$x=b$で囲まれた図形の面積Sは $S=\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$， ただし，$F(x)=\int f(x)dx$	解 (1) $y=x^2+1>0$であるから $\int_{-1}^2(x^2+1)dx=\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^2=\frac{8}{3}+2-(-\frac{1}{3}-1)=6$ 〃 (2) $0\leqq x\leqq\pi$のとき $\sin x\geqq 0$であるから $S=\int_0^{\pi}\sin x dx=-[\cos x]_0^{\pi}=-\{(-1)-1\}=2$ 〃  	・面積と定積分の関係を利用して，面積を求めるとき，(i)では$f(x)=x^2+1$ (ii)では$f(x)=\sin x$が常に正または0を確認せずに定積分の計算を用いる。	・面積を定積分を用いて，求めるときは，関数$f(x)$のグラフをかいて$x^2+1>0$，$\sin x\geqq 0$を確認させる。
EX 2.9 次の定積分の値を求めよ。 (1) $\int_0^2\|x^2-1\|dx$ (2) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\|\cos x\|dx$ 解 絶対値のついた被積分関数のグラフをかいて，積分区間を分けて定積分する。	**解法，技能，計算技術** (2) $\frac{\pi}{3}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$のとき $\cos x\geqq 0$ ∴$\|\cos x\|=\cos x$ $\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi$のとき $\cos x\leqq 0$ ∴$\|\cos x\|=-\cos x$ $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\|\cos x\|dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)dx$ $=[\sin x]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}-[\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=(1-\frac{\sqrt{3}}{2})-(0-1)=2-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 〃  	解 (1) $x^2-1=(x+1)(x-1)$であるから $0\leqq x\leqq 1$のとき$x^2-1\leqq 0$ ∴$\|x^2-1\|=-x^2+1$ $1\leqq x\leqq 2$のとき$x^2-1\geqq 0$ ∴$\|x^2-1\|=x^2-1$ $\int_0^2\|x^2-1\|dx=\int_0^1(-x^2+1)dx+\int_1^2(x^2-1)dx$ $=\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^2$ $=(-\frac{1}{3}+1)+(\frac{8}{3}-2)-(\frac{1}{3}-1)=2$ 〃  	・絶対値のついた関数の定積分の値を求めるとき， $\int f(x)dx=F(x)+c$のとき $\int\|f(x)\|dx=\|F(x)\|+c$が成り立つと考えて計算する。	・絶対値の定義を明確にして計算する。 $\|x\|=\begin{cases}x & (x\geqq 0のとき)\\ -x & (x<0のとき)\end{cases}$ $y=\|x^2-1\|$，$y=\|\cos x\|$のグラフをかいて，定積分の性質(5)を用いて計算する。