「ベクトル」の指導に関する一考察 I

金山　　證*

A Method of Teaching 'Vector' part I

Satoru KANAYAMA

Abstract

'Vector' is an essential concept which is applied to the domain of matrix and determinant as basics to studying higher linear algebra .

The author points out three effective ways of teaching 'vector' to college students.

1. Selecting important 25 examples making a detailed teaching plan (pp. 62-70) in accordance with the students' levels of attainment and utilizing the material for the lesson.
2. Enhancing students' understanding through luminous and single-hearted teaching.
3. Explaining the teaching plan and the history and the concept of theorems, which help inspire students'

1．はじめに

学生は定期試験では満足のいく結果を残す場合も少なくないが，この期間のみの勉強にとどまる消極的な学生が多く，他の分野に適用できるような真の実力は身についていない。２年時になると継続的・発展的な学習活動ができない学生が多く見受けられる。計算が遅い，つまらないところに時間がかかる，勉学の能率が上がらない，満足な答案が書けないなど，計算力・学力の低下が目立つ。一方，学生は数学の結果にこだわる。成績を重視するあまり点数至上主義に陥る。好成績を残すと実力があると錯覚する。学習の習慣がなくテストのときにまとめて学習してもレベルが高くないときは満足のいく結果を残す。しかし，数学的感覚を研く努力を怠ったために思考力や受容性が貧弱なものである。内容が膨大な上に質的にも高く，納得できないままで試験を受ける。当然満足のできない結果に終わる。それは学生が長期的な目的意識を持たないために，学力の充実を図り進路を切り開こうという意識の欠如の現れである。また，高専の授業時数は制限があるために，「ベクトル」は教材として必要最小限のものしか取り扱っていない。授業だけでは必要な数学をマスターすることは困難なものとなっている。基礎数学としての平面上の「ベクトル」の学習が不十分であればこの後に学習する空間におけるベクトル，行列，行列式等の線形代数が理解しにくいばかりでなく，今後の学習や研究に支障をきたしてくる。「計算は式の変形である」といわれるが，実際に鉛筆を走らせながら上手にできるかどうか，これからあとの数学を能率良く学習することができるかどうかの分かれ目となっている。

2．研究の趣旨

高校生向きの教科書の「ベクトル」の取り扱いにそれぞれ多少の違いがあり，細部においては取り扱いに軽重がある。高専生向きの教科書は内容が希薄であり，章末の問題や傍用問題集に対応できる標準的な実力をつけるには例題を補充しなくてはいけない。著者はここに研究のきっかけを見出した。「ベクトル」の本質に触れさせるという方針で，① 補充例題など妥当な例題，② 練習問題とりわけ証明問題，の難度・種類と個数の選定及び配列の決定を目指し，現行の教科書を精査し，重要な項目を精選する。指導細案をまとめ上げ，指導実践を試みる。

3．研究の内容

(1) 教師の願い

理科における力や天気図における風力表示，また数直線の正の向き・負の向き，図形の平行移動など，「ベクトル」を直感的に理解できる素地はある程度養

*一般教科

（平成16年３月29日受付）

われている。そこで本著では「ベクトル」を数学の対象として正しく把握させ，まとまった知識と一貫した考え方を体得させることを主眼とする。

① 「ベクトル」の概念の把握と計算力や論理的記述力を養成する。

② 教科書及び問題集の難問を除く標準的な問題が解ける。

(2) 例題の選定

章末の練習問題や傍用問題集の解法に適した例題,「ベクトル」を扱う基礎となる概念や原理・法則や代表的で重要な性質を用いる例題を種々の形式，内容別に25題を厳選するなど，その例題の選定に工夫する。それらの配列は例題の程度を順次高めていく方法を採用する。解法については簡潔で，要領を得た記述に徹して模範解答を提示するように心掛ける。別解は積極的に取り上げて解法の幅を広げるようにする。これによって，多面的で豊富な解法が身につき,「ベクトル」の理論に対する再発見・認識につながり，他の分野に応用ができる真の力となると考えられる。

4．「ベクトル」の指導の意義

(1) 「ベクトル」の概念は数学全般にわたる基本，線形代数学やベクトル解析の理論の基礎，他の諸科学への応用としてきわめて重要である。「関数」と並んで高専数学の中心として実り多い成果を示している。学問としての数学を通して，数学における考え方，進め方を知り，筋道を立てて物事を考えるしかたを身につけるという意味でも大切である。

(2) 「ベクトル」を定義し，平面上の矢線（有向線分）で「ベクトル」を捉えてその相等条件，根幹である加法・減法（加法の逆演算）・実数倍を図表示することにより，直感的に理解させる。「ベクトル」を加えることは，図形的には平行移動になることを理解させるなど加法・減法・実数倍のもつ幾何学的意味を明らかにする。また，例題を通して理解を深めながら,「ベクトル」の演算法則が成り立つこと，その演算は数・整式の演算と同様の取り扱いができることを知る。

(3) 「ベクトル」は有向線分の大きさと向きとか，いくつかの数の組というような量をまとめて1つのものとして取り扱うこと，その演算が線形性という簡単な法則に従っていることに基づいている。どのような性質が保存されるかを知って「ベクトル」の概念についての理解を深める。

(4) 幾何的に定義した「ベクトル」を1対1に対応する成分で表すこと，すなわち2つの実数の組と同等に扱うことによって，代数的な取り扱いができることを知る。また，高次元「ベクトル」への拡張を内蔵していると考えられるなどその有用性，及び数学的な方法や考え方の理解を深めることができる。

(5) 「ベクトル」のもつ基本的な性質である「ベクトル」の分解を用いたり，2つの「ベクトル」の垂直条件や平行条件，点が直線上にある条件を考えたりしながらベクトルを用いると図形の性質の考察がし易いことや，図形（直線，円とその接線）の方程式が簡単に求められること，次元に関係なく扱うことができることから「ベクトル」に対する素朴な量感覚の上に，有用なもの，いろいろな性格を持ったものであることを知る。

(6) 位置ベクトルの考えを導入し，いろいろな問題を通じて「ベクトル」による平面図形の性質の考察・研究ができることを体験させる。図形への応用を扱うことを通して「ベクトル」のもつよさや有用性の理解を深める。

(7) 内積を利用しての平面図形の性質の考察を通して適切かつ能率的に活用する能力を伸ばす。また，「ベクトル」を用いる証明の簡潔さを知る。

5．「ベクトル」の指導について

「ベクトル」における質の高い高専数学を学生のものにするための指導の在り方を2つの側面，(1)教材・指導法の見直しと工夫・改善　(2)学習の仕方・取り組み方の転換 から考察をする。

(1) 教材・指導法の見直しと工夫・改善

教科書（線形代数：大日本図書）ではいろいろな制約のために定着を図るための十分な配慮がなされているとはいい難い。教科書の不備な箇所や解説不足或いは解説がなく問題が与えられていて学生が難解に感じる箇所は定義・公式，例題の補充をする。また，練習問題の質問教室では授業形態を講義形式の一斉授業一辺倒にせずグループ学習や個別学習を取り入れて個々の学力に応じた手だてをとる必要がある。

① 事前に指導細案（62ページから70ページに掲載）を作成して授業を展開する。

② 授業実践で心掛けていることとして板書事項で要点を押さえる。

授業では要点を押さえた解説に徹し，時間の許す限り教科書の行間の意味をひもといたり，細かい計算や論理の記述に飛躍がないよう十分注意を払う。分かり易い，丁寧な指導を心掛ける。

③ 数学に対する興味を持たせる。

学生に興味を起こさせ，かつ持続させる一端として各章の冒頭の授業でこの章で学習する内容の概略，及び，新しい概念，記号，用語，定義，公式や文字の使用に関する歴史的覚え書き・背景やエピソードを取り込むことも大切である。しかし，実際は授業で取り扱うことができないのが事実で

ある。

(2) 学習の仕方・取り組み方の転換

問題を見て，その問題の内容を理解すると，問題の難易や解法に対する直観が，過去の知識の集積または既知の問題に対する類推から，浮かぶことが多い。これがいわゆる実力である。実力が身についているとはいえないことは新しい問題に直面したときにすぐわかる。「ベクトル」の実力をつけるには定期試験で良い結果が残せたことから実力がついているというような誤った観念を払拭し，数学は積み上げの学問であることを銘記して数学に対する取り組み方を転換することが大切である。学生自身が相当の努力をする覚悟を固める必要がある。次の5つの点から指導する。

① 授業に集中する。毎日集中するものとしないものとの差は大きいことに気づかせる。

② 学習の習慣化を図る。継続的な学習により学習の仕方を身につけたり，数学的感覚を研ぎすまして発想を豊かにする。練習問題では模範解答が書けるようになることが真に実力が養成されることであることを知らせる。

③ 系統的に学習効果を修める。例題では基礎となる重要な性質や考え方，計算や証明のコツを捉える。練習問題ではベクトルの成分の計算で数式計算，図形の性質の考察・研究，論理的記述に慣れることに主眼をおく。教師からの例題の解法と必要な要項の解説の後に続けて，その反復により理解を深めて練習を順次実行する。扱う例題・練習問題の程度を順次に高めてあるので，確実に基礎を固めながら練習を積み重ねる。練習問題の解法後，授業時は模範解答で添削し，留意点に目を輝かすなど集中して取り組むことにより，問題の処理の仕方が自然に体得できたり，新しい問題に対し適切な解決の見通しを得たりできるようになる。

④ 理解を確認する。単元の1節が終わる毎（短い節の場合は2節をまとめる）の小テストで理解度をチェックしながら授業に望む。

⑤ 授業では十分に練習する時間がない。放課後を利用してのプリント学習，家庭での「ベクトル」計算の反復練習や教科書の各章の節が終了した時点の節末の練習問題，及び長期休暇期間を利用した既習事項に該当する問題のレポートの作成を通して計算能力や論理的記述力を充実する。

さらに，いままでの学習の仕方を見直し，転換し，効果の上がる方法を確立しなくてはならない。次の3つの点から指導する。

① 自分自身で作り上げた解答を大切にし，正解によって間違った箇所を消すことなく，途中の計算式や論理的記述を含む自分の解答の添削をする事を徹底する。

② 答のみの記述よりも，鉛筆を走らせながら解答へ至る筋道を大事にした記述に重点をおく。

③ 練習問題の解答による添削を通して筋道だった考え方による正解に着目して，論理を重視する態度，数学の理論的厳密さや論理的記述力を身につける。

6．歴史的覚え書き

(1) エピソード…ハミルトンとベクトル

「ベクトル」の成分表示や内積などを定義したハミルトン（1805－1865）はアイルランド生まれの数学者である。1843年に「4元数（4つの数の組の代数)」を発見，新ニュートンといわれたほどの天才だった。彼は複素数を根元的な立場から考えた。$\sqrt{-1}$には意味がなく，したがって実数a，bに対して$a+b\sqrt{-1}$の＋には（普通の）加法としての意味がないとした。単につなぐ記号なのだから括弧を用いて実数の対（a，b）として考えるべきであると考える。すると，複素数が合理的に導入される。複素数の加法や減法はベクトルのそれと同じであるが，実は複素数のこのような導入から「ベクトル」の概念が導かれたのである。有向線分で平行移動を同一視したものとして「ベクトル」を考えたのも，複素数を用いて平面幾何を研究したのも，また，「ベクトル」という言葉を創造したのもハミルトンの功績である。

(2) 「ベクトル」の史的発展

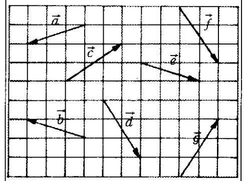
力や速度のように向きと大きさもった量を「ベクトル」というが，それが数学の世界に取り入れられたのは18世紀になってからである。素朴な意味での「ベクトル」は単に数の組を意味するにすぎない。大学数学で習う「ベクトル」は単にベクトル空間（定義は加法・減法・実数倍ができる集合のこと）の元を意味するにすぎない。ハミルトンとグラスマン（1809－1877）の二人が今日の線形代数学やベクトル解析への発展の基礎をつくった。

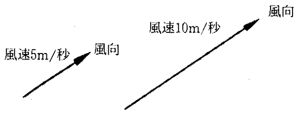
7．参考文献

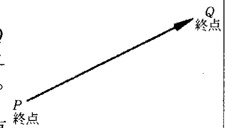
（1） 数学B・改訂版数学B　永尾　汎　数研出版
（2） 数学B及びその改訂版　藤田　宏・前原昭二　東京書籍
（3） 数学B・数学B改訂版 小松勇作 旺文社
（4） 線形代数　田河生長　大日本図書
（5） 新編 高専の数学2　田代嘉宏・難波完爾　森北出版
（6） 高等学校学習指導要領解説　数学編　文部省

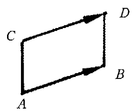
指導細案(No. 1)

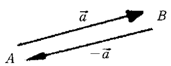
問題，解法の手順	前提内容，関連事項	解法，技能，計算技術	誤り易い箇所	指導上の留意点
EX1 (1) 下図の中で，等しいベクトルをいえ。また，互いに逆ベクトルであるものをいえ。 解 (1) ベクトルの相等，逆ベクトルの定義 ① ベクトルの相等 ⇔有向線分の大きさ，向きが等しい 逆ベクトル ⇔大きさが等しく，向きが反対であるベクトル ② 大きさ⇔線分の長さ 向き⇔矢印の向き (2) 横，縦方向のマス目をきちんと押さえる。大きさは，斜辺を三平方の定理を用いて求める。	○ベクトルの意味（有向線分とベクトル） 風について…風の強さ（風速）は同じでも，その向き（風向）が異なると，物体に及ぼす働きは変化する。北風か南風かで対策のたて方は異なる。風速と風向を同時に表すには，矢印を用いる。矢印の向きで風向を，矢印の長さで風速を表す。右図のように風速が2倍になれば，矢印の長さも2倍にする。風のように，大きさと同時に向きをもつ量をベクトルという。速度や力もベクトルである。 長さ，温度，時間，面積，質量などのように，単に大きさだけで定まる量をスカラーという。 線分PQにおいて，点P（始点）から点Q（終点）に向かう「向き」をつけて考えるとき，その線分を有向線分PQという。線分PQの長さで有向線分の大きさを，矢印の向きで有向線分の向きを表す。有向線分について，その位置を問題にせず，向きと長さだけに着目したものをベクトルという。ベクトルを図示するには有向線分を用いる。有向線分の大きさでベクトルの大きさを，矢印の向きでベクトルの向きを表す。記号 $\overrightarrow{PQ}$と書く。1つの記号$\vec{a}$, $\vec{b}$などを用いる。$\overrightarrow{PQ}$, $\vec{a}$の大きさを$\lvert\overrightarrow{PQ}\rvert$, $\lvert\vec{a}\rvert$で表す。$\lvert\overrightarrow{PQ}\rvert$は線分$PQ$の長さに等しい。 ○ベクトルの相等 2つのベクトルが等しい⇔ベクトルを表す有向線分の向きと長さが等しい有向線分ABを平行移動して，有向線分CDに重ね合わせることができる。左図の場合 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$	解 (1) ・等しいベクトル…$\vec{d}$と$\vec{f}$：横2，縦−3方向 ・逆ベクトル…$\vec{b}$と$\vec{e}$ $\vec{b}$：横−3，縦1方向 逆ベクトル$\vec{e}$：横3，縦−1方向 (2) 右図の中で，等しいベクトル，大きさの等しいベクトル，向きの等しいベクトルをいえ。 解 (2) ・等しいベクトル…①と⑦：横2，縦3方向 ③と⑩：横2，縦2方向 ④と⑨：横−2，縦−3方向 ・大きさの等しいベクトル…①，④，⑦，⑨ 斜辺の大きさ$\sqrt{13}$ ③と⑩ 斜辺の大きさ$2\sqrt{2}$ ・向きの等しいベクトル…①と⑦：横2，縦3方向 ②，③，⑩：横2(3)，縦2(3) 方向 ④と⑨：横−2，縦−3方向	・(1)：$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{e}$のグループ，$\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{f}$, $\vec{g}$のグループはそれぞれ大きさが等しい。これに惑わされて等しいベクトル，逆ベクトルに誤って入れてしまう。 ・(2)：①，④，⑦，⑨のグループ，③，⑩のグループはそれぞれ大きさが等しい。 ・①，⑦のグループ，②，③，⑩のグループ，④，⑨のグループはそれぞれ向きが等しい。 ・どちらか一方の見方を無視した見方，向きの場合に，②を③と⑩のグループに入れないためにミスをする。	・等しいベクトルとは大きさ，向きともに等しい定義をきちんととらえる。また，逆ベクトルは大きさは等しいが向きが反対であるベクトルの定義を押さえておく。マス目を数えて等しいベクトルと逆ベクトルを求めると確実であることに着目する。 ・大きさはマス目を数えて確実にできる。 ・その上に向きが同じものである等しいベクトルは容易に見い出すことができる。 ・マス目を数えただけでは向きの等しいベクトルはとらえられない。 傾き(平均変化率) $=\dfrac{縦の増分}{横の増分}$ をとると②も③もその値が1で同じになっている。
EX2 (1) 下図において，次のベクトルを図示せよ。 (ア) $\vec{a}+\vec{b}$ (イ) $\vec{c}+\vec{a}$ (ウ) $\vec{a}+\vec{d}$ (エ) $\vec{b}+\vec{c}$ 解 (1) ベクトルの和 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$を用いる。 (2) 括弧を先にベクトルの和を用いる。次に再びベクトルの和を用いる。	○逆ベクトルと零ベクトル ベクトル$\vec{a}$と大きさが同じで，向きが反対のベクトルを$\vec{a}$の逆ベクトルという。$-\vec{a}$で表す。$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$とすると，$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}=-\vec{a}$ 始点と終点の一致したベクトル$\overrightarrow{AA}$を零ベクトルという。$\vec{0}$で表す。$\vec{0}$の大きさは0，向きは考えない。 ○ベクトルの演算（加法，減法，実数倍） ・2つのベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$に対して， $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$ とするとき，$\overrightarrow{AC}$を$\vec{a}$と$\vec{b}$の和といい， $\vec{a}+\vec{b}$と書く。 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ ・ベクトルの加法の法則 1 交換法則 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ 2 結合法則 $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ $(=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$	解 (1) いずれも加算するベクトルの始点を，加算されるベクトルの終点に合わせると加算されるベクトルの始点を始点とし，加算するベクトルの終点を終点，とするベクトルをとる。 (2) 下図を利用して，ベクトルの加法についての交換法則，結合法則が成り立つことを示せ。($\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{c}=\overrightarrow{CD}$とする。) 〔証〕 左辺$=\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ 右辺$=\vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$ $\therefore \vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$ 左辺$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$ $\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{BD}$ 右辺$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$ $\therefore(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (終)〃	・(1) 和の定義の用い方がきちんと押さえられていないと図示できない。 〔1〕 三角形の法則 〔2〕 平行四辺形の法則 ・(2) 図形から，ベクトルの和を有向線分で左辺，右辺を表すと同じになることを示してもよい。	・加算するベクトルの始点を，加算されるベクトルの終点に合わせると加算されるベクトルの始点を始点，加算されるベクトルの終点を終点，とするベクトルが求められることに着目する。 〔1〕 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ 〔2〕 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$ ・交換法則〔証〕 左辺$=\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ 右辺$=\vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$ $\therefore \vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (終)〃 ・結合法則〔証〕 左辺$=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}$ $=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$ 右辺$=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})$ $=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$ $\therefore(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (終)〃
EX3 △OABにおいて， (1) 次の式が成り立つことを示せ。 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ (2) 次のベクトルの差を求めよ。 (ア) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO}$ (イ) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{BA}$ 〔解〕 減法を逆ベクトルを加えることとする。	・零ベクトルの性質 $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$, $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}$, $-\vec{0}=\vec{0}$ ・2つのベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$に対して，$\vec{a}=\vec{b}+\vec{x}$を満足するベクトル$\vec{x}$を，$\vec{a}$から$\vec{b}$を引いた差という。$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$と定める。 ベクトルの減法を逆ベクトルを加えることと定義する。	〔証〕 (1) 右辺$=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+(-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}=$左辺(終)〃 〔解〕 (2) (ア) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$〃 (イ) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$〃	・(1)，(2) ともに$\vec{a}-\vec{b}$は，$\vec{a}-\vec{b}=\vec{x}$とおくと，$\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$を満たす$\vec{x}$に一致することを示してもよい。	〔別証〕(1) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$ ∴$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ (終)〃 別解 (2) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO}=\vec{x}$とおくと$\overrightarrow{AO}+\vec{x}=\overrightarrow{AB}$ ∴$\vec{x}=\overrightarrow{OB}$〃 ・$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{BA}=\vec{x}$とおくと$\vec{x}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$ ∴$\vec{x}=\overrightarrow{OB}$〃

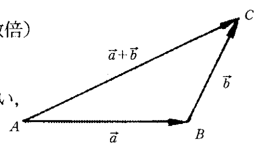


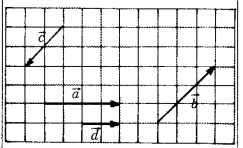


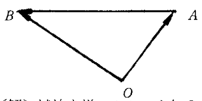


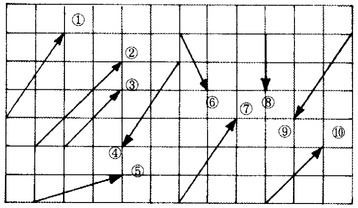


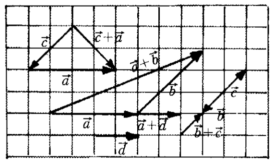


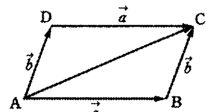


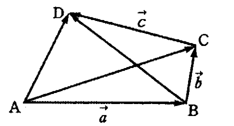


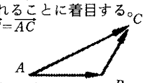


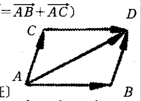




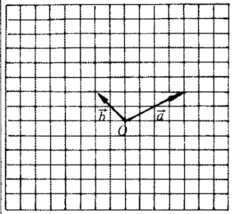
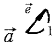
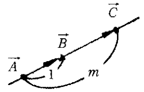
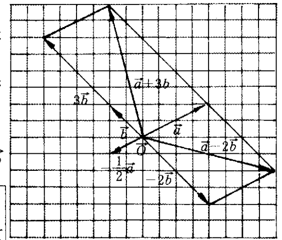
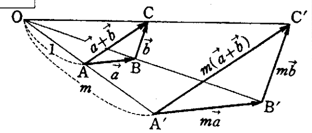
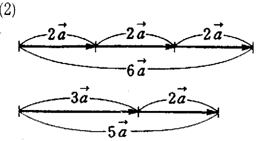
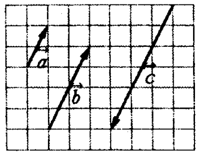
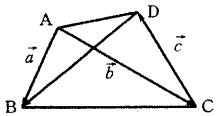
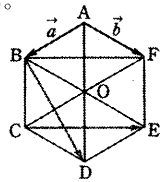


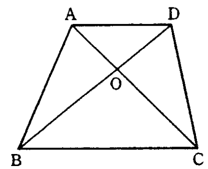


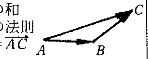


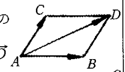


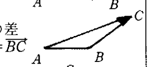
指導細案(No. 2)

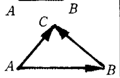
問題，解法の手順	前提内容，関連事項	解法，技能，計算技術	誤り易い箇所	指導上の留意点
EX4 (1) 下図のように，$\vec{a}$, $\vec{b}$ が与えられたとき，次のベクトルを図示せよ。 (ア) $-\frac{1}{2}\vec{a}$　(イ) $\vec{a}+3\vec{b}$ (ウ) $\vec{a}-2\vec{b}$  解 (1) ベクトルの実数倍，和，差の定義，その合成 (2) 左辺の $m(\vec{a}+\vec{b})$，右辺の $m\vec{a}+m\vec{b}$ をともに図の有向線分で表し，等しいことを示す。	・ベクトルの実倍数　・m:実数，ベクトル $\vec{a}$，$m\vec{a}$($\vec{a}$のm倍)の定義 $m\vec{a}$の大きさは$\lvert\vec{a}\rvert$の$\lvert m\rvert$倍，向きは$m>0$のとき$\vec{a}$と同じ向き $m<0$のとき$\vec{a}$と反対の向き  $m=0$または$\vec{a}=\vec{0}$のとき，$m\vec{a}=0$ $1\vec{a}=\vec{a}$，$(-1)\vec{a}=-\vec{a}$，$\lvert m\vec{a}\rvert=\lvert m\rvert\lvert\vec{a}\rvert$ ・大きさが1のベクトル…単位ベクトル  $\vec{a}\neq\vec{0}$のとき，$\vec{a}$と同じ向きの単位ベクトルを$\vec{e}$とすると $\vec{e}=\frac{\vec{a}}{\lvert\vec{a}\rvert}$ 〔証〕$\vec{e}=m\vec{a}$とすると， $\lvert\vec{e}\rvert=\lvert m\vec{a}\rvert$　∴ $1=m\lvert\vec{a}\rvert$　∴ $m=\frac{1}{\lvert\vec{a}\rvert}$　∴ $\vec{e}=\frac{\vec{a}}{\lvert\vec{a}\rvert}$　(終)〃 ・計算法則　m, nは実数とする。　1 $(mn)\vec{a}=m(n\vec{a})$ 2 $(m+n)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a}$　3 $m(\vec{a}+\vec{b})=m\vec{a}+m\vec{b}$ ・ベクトルの平行　$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, 2つのベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$が同じ向きまたは反対向きであるとき，$\vec{a}$と$\vec{b}$は平行であるという。$\vec{a}/\!/\vec{b}$と書く。平行と実数倍の定義より ベクトルの平行条件　$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$のとき，$\vec{a}/\!/\vec{b}\Leftrightarrow\vec{b}=m\vec{a}$，ただし$m\neq0$ 3点が1直線上にあるための条件 異なる3点A, B, Cが1直線上にある $\Leftrightarrow\ \overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AB}$ 	解 (1) (ア) $-\frac{1}{2}\vec{a}$　大きさは$\lvert\vec{a}\rvert$の$\frac{1}{2}$，向きは$\vec{a}$と反対 (イ) $\vec{a}+3\vec{b}$　$3\vec{b}$は大きさは$\lvert\vec{b}\rvert$の3倍，向きは$\vec{b}$と同じ　和：$\vec{a}$と$3\vec{b}$ (ウ) $\vec{a}$　$2\vec{b}=\vec{a}+(-2\vec{b})$ $-2\vec{b}$は大きさは$\lvert\vec{b}\rvert$の2倍，向きは$\vec{b}$と反対，和：$\vec{a}$と$-2\vec{b}$  (2) 計算法則について (ア) $m=3$, $n=2$のとき， 法則1，2が成り立つことを図を用いて確かめよ。 (イ) 右図を用いて法則3が成り立つことを示せ。  解 (2) (ア) 1  1 右辺$=3(2\vec{a})=6\vec{a}=(3\cdot2)\vec{a}=$左辺〃 2 右辺$=3\vec{a}+2\vec{a}=5\vec{a}=(3+2)\vec{a}$ $=$左辺〃 (イ)〔証〕$\triangle ABC\backsim A'B'C'$，相似比は$1:m$　$AB/\!/A'B'$, $BC/\!/B'C'$, $AC/\!/A'C'$ $OA:OA'$, $OB:OB'$, $OC:OC'$, $AB:A'B'$, $BC:B'C'$, $AC:A'C'$はいずれも$1:m$ $\overrightarrow{A'B'}=m\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B'C'}=m\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{A'C'}=m\overrightarrow{AC}$であるから 左辺$=m(\vec{a}+\vec{b})=m\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'C'}=m\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}=m\vec{a}+m\vec{b}$ $=$右辺 (終)〃	・ベクトルの実数倍では $-\frac{1}{2}\vec{a}$などのように$-\frac{1}{2}$倍，ベクトルの差，$\vec{a}-2\vec{b}$などは図示に戸惑う。 ・計算法則の左辺，右辺と図上のどのベクトルが対応するかを見るのに手間取る。 ・計算法則3では，左辺，右辺ともに図上では$\overrightarrow{A'C'}$になることがとられないためにつまづく。	・$-\frac{1}{2}\vec{a}$について，大きさは$\left\lvert-\frac{1}{2}\right\rvert=\frac{1}{2}$，向きは$\vec{a}$と反対，始点を$O$としてとると図示し易い。 ・$\vec{a}-2\vec{b}$について，$\vec{a}+(-2\vec{b})$と和の形に変形して考える。$-2\vec{b}$は，大きさは$\lvert-2\rvert=2$，向きは$\vec{b}$と反対，始点を$O$としてとり，和$\vec{a}+(-2\vec{b})$は，$\vec{a}+3\vec{b}$と同様にして，平行四辺形の対角線のベクトルにとると図示し易い。 ・計算法則の確認では，図の$6\vec{a}$，$5\vec{b}$がそれぞれ1，2の左辺になっていることに着目する。 ・$\overrightarrow{A'C'}$を左辺では相似比$1:m$を用いて$\overrightarrow{AC}$で表し，右辺ではベクトル$\overrightarrow{A'B'}$と$\overrightarrow{B'C'}$の和，かつ，相似比$1:m$から$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$を用いて表されることに着目する。
EX5 (1) $3(2\vec{a}+\vec{b})-2(-\vec{a}+4\vec{b})$ の計算をせよ。 (2) $3(\vec{x}+2\vec{a})-2(\vec{x}-4\vec{b})$ $=\vec{a}+\vec{b}-\vec{x}$のとき，$\vec{x}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$で表せ。 (3) $\begin{cases}2\vec{x}-3\vec{y}=\vec{a}\cdots①\\-\vec{x}+2\vec{y}=\vec{b}\cdots②\end{cases}$ のとき，$\vec{x}$, $\vec{y}$, を$\vec{a}$, $\vec{b}$で表せ。 解 (1) (2) (3) ・ベクトルの加法，減法，実数倍を含む式の計算は，整式の場合と同じように行えばよい。	Q1 右図で$\vec{b}$, $\vec{c}$を$\vec{a}$表せ。また，$\vec{a}$, $\vec{b}$を$\vec{c}$で表せ。  解 $\vec{b}$は$\vec{a}$と同じ向き，大きさは2倍 よって $\vec{b}=2\vec{a}\cdots①$ $\vec{c}$は$\vec{a}$と反対の向き，大きさは3倍 よって $\vec{c}=-3\vec{a}\cdots②$ ②より $\vec{a}=-\frac{1}{3}\vec{c}\left(=-\frac{\vec{c}}{3}\right)$〃…③ ③を①に代入して $\vec{b}=-\frac{2}{3}\vec{c}$〃 ・ベクトルの分解 平面上で2つのベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$($\vec{a}\not\parallel\vec{b}$)が与えられたとき，他のベクトルをこれら2つのベクトルを用いて表せる。	解 (1) 与式$=6\vec{a}+3\vec{b}+2\vec{a}-8\vec{b}=(6+2)\vec{a}+(3-8)\vec{b}=8\vec{a}-5\vec{b}$〃 (2) $3\vec{x}+6\vec{a}-2\vec{x}+8\vec{b}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{x}$　$(3-2+1)\vec{x}=(1-6)\vec{a}+(1-8)\vec{b}$ $2\vec{x}=-5\vec{a}-7\vec{b}$　∴ $\vec{x}=-\frac{5\vec{a}+7\vec{b}}{2}$〃 (3) ①+②×2　$\vec{y}=\vec{a}+2\vec{b}$〃…③　②より $\vec{x}=2\vec{y}-\vec{b}=2(\vec{a}+2\vec{b})-\vec{b}$ $=2\vec{a}+3\vec{b}$ (∵③)〃	・ベクトルの計算法則は整式の計算法則と変らないことに気づくと簡単に計算できる。	・ベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$を文字a, b, x, y, のように見なして計算すると容易である。
EX6 (1) 下図において$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$とおく。次の等式を証明せよ。 $\overrightarrow{DB}=\vec{a}-(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}-\vec{b})-\vec{c}$  解 (1) 1 括弧内を先にするとき，ベクトルの和・差の定義を用いて変形する。 (2) 示すこと $\overrightarrow{BC}=m\overrightarrow{AD}\cdots①$ 差の定義から$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$ $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}$ を用いて，①を満たす適当な実数mが存在することを示す。	Q2 正六角形$ABCDEF$において $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AF}=\vec{b}$とするとき，次のベクトルを$\vec{a}$, $\vec{b}$で表せ。 (1) $\overrightarrow{CE}$　(2) $\overrightarrow{BD}$　(3) $\overrightarrow{CB}$　(4) $\overrightarrow{DF}$  解 (1) $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BF}$，また，$\vec{a}+\overrightarrow{BF}=\vec{b}$であるから∴ $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{CE}=\vec{b}-\vec{a}$〃 (2) 正六角形の中心を$O$とすると $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{ED}=2\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{ED}=2\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AB}=2\vec{a}+\vec{b}$〃 (3) $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{CE}-2\overrightarrow{AF}=(\vec{b}-\vec{a})-2\vec{b}=-\vec{a}-\vec{b}$〃 (4) $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=-\vec{a}+(-\vec{a}-\vec{b})=-2\vec{a}-\vec{b}$〃	証 (1) $\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}\cdots①$　$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}(=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{CB}\cdots②$ 左辺 $=\vec{a}-(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}(=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{DB}$ 右辺$=(\vec{a}-\vec{b})-\vec{c}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}(=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB})=\overrightarrow{DB}$ ∴ $\overrightarrow{DB}=\vec{a}-(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}-\vec{b})-\vec{c}$ (終)〃 (2) 四角形$ABCD$の対角線交点をOとする。 $2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$ が成立つとき，$\overrightarrow{BC}/\!/\overrightarrow{AD}$であることを示せ。 〔証〕変形して　$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=2(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})$ $(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}=2(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD})$ ∴ $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AD}$　∴ $\overrightarrow{BC}/\!/\overrightarrow{AD}$ (終)〃	・ベクトルの和や差が図の有向線分で表示できるようになれば難しくない。 ・示すこと $\overrightarrow{BC}=m\overrightarrow{AD}$に向かって論を展開していくのであるが，まず与式を変形できないとスムーズに証明できない。	・ベクトルの和 〔1〕三角形の法則 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ 〔2〕平行四辺形の法則 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ ・ベクトルの差 $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$ 図を通して，和や差を理解しておくことが大切である。 ・Oを始点として，$\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$をベクトルの差で表されることに着目できると与式の変形は易しい。



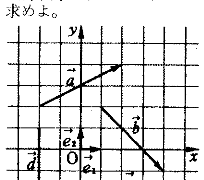
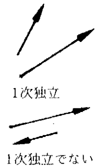
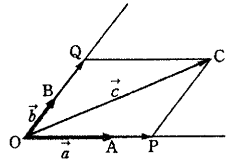
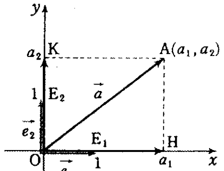
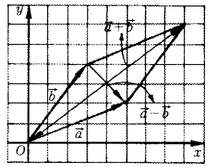
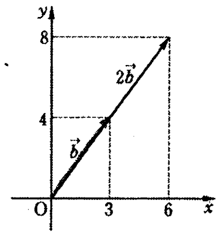
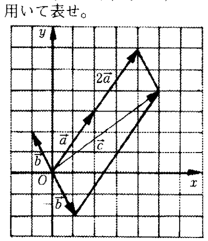
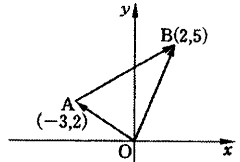
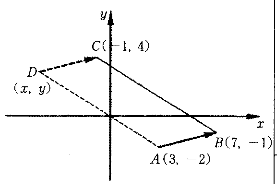




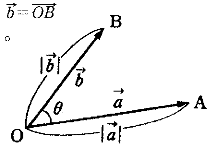


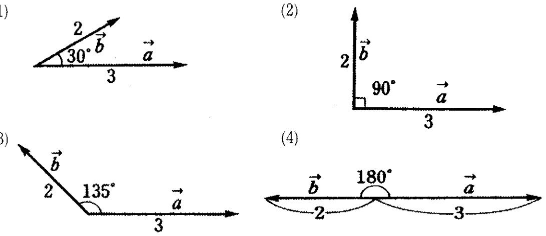


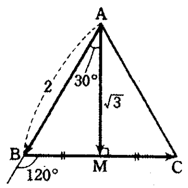
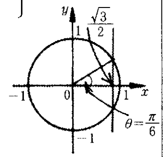
指導細案(No. 3)

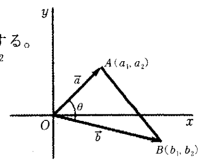
問題，解法の手順	前提内容，関連事項	解法，技能，計算技術	誤り易い箇所	指導上の留意点
EX7 (1) 下図のベクトルを，基本ベクトルで表せ。また，成分表示し，その大きさを求めよ。  解 (1) ・x軸，y軸方向のマス目をきちんと押さえる。 (2) 基本ベクトルによる表示のときは， (ア) 整式の場合と同じように計算する。 (イ) 成分表示のときはx成分，y成分毎，それぞれの和，差，実数倍を計算する。 (ウ) 成分の代入は，$\vec{x}$について簡単にしてから行う。 (エ) 求めるベクトルを$\vec{e}$とすると $\vec{e}=\dfrac{\vec{a}}{\lvert\vec{a}\rvert}$	・ベクトルの1次独立　平面上の2つのベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$について $\vec{a}$と$\vec{b}$は1次独立 $\Leftrightarrow$ $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$かつ$\vec{a}\nparallel\vec{b}$ 1次独立の定理 (1) $m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{0} \Rightarrow m=n=0$ (2) 平面上の任意のベクトル$\vec{c}$は，$\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$の形にただ1通りに表される。  1次独立 1次独立でない (1次従属) (1)について　$m\neq0$とすると $\vec{a}=-\dfrac{n}{m}\vec{b}$となり，$\vec{a}$と$\vec{b}$が1次独立であることに反する。 よって $m=0$，同様に $n=0$ (2)について　1点Oをとって $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$とする。 $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$とし，右図のように平行四辺形$OPCQ$をつくるとき，$\overrightarrow{OP}=m\vec{a}$, $\overrightarrow{OQ}=n\vec{b}$ (m, nは適当な実数) と表される。$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$であるから，$\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$…$\vec{a}$と$\vec{b}$の線形結合  一意性　$\vec{c}$が$m\vec{a}+n\vec{b}$, $p\vec{a}+q\vec{b}$の2通りに表されたとする。 $m\vec{a}+n\vec{b}=p\vec{a}+q\vec{b}$ $(m-p)\vec{a}+(n-q)\vec{b}=\vec{0}$　(1)より$m-p=n-q=0$ ∴ $m=p$, $n=q$ よって表し方は一意的 ○ベクトルの成分 右図で$E_1(1,0)$, $E_2(0,1)$をとるとき $\vec{e_1}=\overrightarrow{OE_1}$, $\vec{e_2}=\overrightarrow{OE_2}$ を基本ベクトルという。 任意のベクトル$\vec{a}$に対して $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$となる点$A$の座標を$(a_1, a_2)$とする。$A$から$x$軸，$y$軸に下ろした垂線をそれぞれ$AH$, AK  とすると $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OK}$, $\overrightarrow{OH}=a_1\vec{e_1}$, $\overrightarrow{OK}=a_2\vec{e_2}$より $\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$ とただ1通りに表される。(a_1:x成分，a_2:y成分) 基本ベクトルによる表示 $\vec{a}$を$\vec{a}=(a_1, a_2)$　$\left(\overrightarrow{OA}=(a_1, a_2)\right)$と書き表わす　成分表示 成分表示について　$\vec{0}=(0,0)$, $\vec{e_1}=(1,0)$, $\vec{e_2}=(0,1)$ ベクトル$\vec{a}$の成分は，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$と表したときの点$A$の座標 ・ベクトルの相等　$\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$ $\vec{a}=\vec{b}\left((a_1, a_2)=(b_1, b_2)\right)\Leftrightarrow a_1=b_1,\ a_2=b_2$ ・ベクトルの大きさ　$\lvert\vec{a}\rvert^2=OA^2=OH^2+AH^2=a_1{}^2+a_2{}^2$　∴ $\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}$ ・ベクトルの演算と成分 (基本ベクトルを用いて示される) (1) $(a_1, a_2)\pm(b_1, b_2)=(a_1\pm b_1,\ a_2\pm b_2)$　(複号同順) (2) $m(a_1, a_2)=(ma_1, ma_2)$　(m:実数) 一般に$m(a_1, a_2)+n(b_1, b_2)=(ma_1+nb_1, ma_2+nb_2)$ ○$\overrightarrow{AB}$の成分と大きさ　$A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$のとき $\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$　$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$ ・ベクトルの平行　$\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$のとき $\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{b}=m\vec{a}\Leftrightarrow(b_1, b_2)=m(a_1, a_2)$ Q3　$\vec{a}=(3,-2)$, $\vec{b}=(1,-4)$, $\vec{c}=(-1,2)$のとき，$\vec{a}+t\vec{b}$が$\vec{c}$と平行になるように実数tの値を求めよ。 解 $\vec{a}+t\vec{b}\parallel\vec{c}$より　$\vec{a}+t\vec{b}=k\vec{c}$となる実数$k$が存在する。$(3,-2)+t(1,-4)=k\times(-1,2)$　∴ $(3+t, -2-4t)=(-k, 2k)$ ベクトルの相等から　$3+t=-k$, $-2-4t=2k$ kを消して　$2(3+t)+(-2-4t)=0$　∴ $t=2$〃	解 (1) $\vec{a}=4\vec{e_1}+2\vec{e_2}=(4,2)$〃　大きさ$\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$〃 $\vec{b}=3\vec{e_1}-3\vec{e_2}=(3,-3)$〃　大きさ$\sqrt{3^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$〃 $\vec{c}=-2\vec{e_1}=(-2,0)$〃　大きさ2〃 $\vec{d}=-3\vec{e_2}=(0,-3)$〃　大きさ3〃 (2) (ア) $\vec{a}=5\vec{e_1}+2\vec{e_2}$, $\vec{b}=3\vec{e_1}+4\vec{e_2}$のとき，$\vec{a}$と$\vec{b}$の和，差，実数倍$2\vec{b}$を基本ベクトルで表せ。また，成分表示せよ。 (イ) $\vec{a}=(2,-1)$, $\vec{b}=(-2,3)$のとき，$3\vec{a}+2\vec{b}$を成分表示し，その大きさを求めよ。 (ウ) $\vec{a}=(3,0)$, $\vec{b}=(4,-5)$のとき，$\vec{a}-3\vec{x}=2(\vec{x}+\vec{b})$を満たす$\vec{x}$の成分表示を求めよ。 (エ) $\vec{a}=(12,-5)$と同じ向きの単位ベクトルを成分表示せよ。  解 (2) (ア) $\vec{a}\pm\vec{b}=(5\vec{e_1}+2\vec{e_2})\pm(3\vec{e_1}+4\vec{e_2})$ $(5\pm3)\vec{e_1}+(2\pm4)\vec{e_2}=\begin{cases}8\vec{e_1}+6\vec{e_2}〃\\2\vec{e_1}-2\vec{e_2}〃\end{cases}$ (複号同順) $2\vec{b}=2(3\vec{e_1}+4\vec{e_2})=6\vec{e_1}+8\vec{e_2}$〃  成分表示　$(5,2)\pm(3,4)=(5\pm3, 2\pm4)=\begin{cases}(8,6)〃\\(2,-2)〃\end{cases}$　$2(3,4)=(6,8)$〃 (複号同順) (イ) $3\vec{a}+2\vec{b}=3(2,-1)+2(-2,3)=(6,-3)+(-4,6)=(6-4, -3+6)=(2,3)$〃 (ウ) $5\vec{x}=\vec{a}-2\vec{b}$ ∴ $\vec{x}=\dfrac{1}{5}(\vec{a}-2\vec{b})=\dfrac{1}{5}\{(3,0)-2(4,-5)\}=\dfrac{1}{5}(-5,10)=(-1,2)$〃 (エ) $\vec{e_1}=\dfrac{\vec{a}}{\lvert\vec{a}\rvert}=\dfrac{(12,-5)}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}=\dfrac{(12,-5)}{13}=\left(\dfrac{12}{13}, -\dfrac{5}{13}\right)$〃	・マス目がx軸方向の右方向は＋(プラス)，左方向は－(マイナス)，y軸方向の上方向は＋(プラス)，下方向は－(マイナス) これをうっかり忘れてミスをする。 ・(2)の(ア)，(イ)については複雑な計算でないのでスムーズにいく。 ・(ウ)については$\vec{x}=(x, y)$として，与式を変形して$\vec{x}$についてまとめることなく，直接与式に成分を代入すると計算に手間取る。 ・単位ベクトルは大きさが1となるものであった。$\vec{a}$と同じ向きの単位ベクトルは求め方を忘れていてできない。	・基本ベクトルを用いたときはマス目に相等する実数の倍数をとり，実数倍のベクトルの和で表される。x軸，y軸方向の右，上方向はともにプラス，左，下方向はともにマイナスを矢印を用いて意識させる。 ・両辺に存在する$\vec{x}$をまとめて，$\vec{x}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$を用いて表して後に成分を代入すると計算が容易になる。 ・$\vec{a}$と同じ向きの単位ベクトルを$\vec{e}$とすると $\vec{e}=m\vec{a}$ $(m>0)$…①と書ける。両辺の絶対値をとると， $\lvert\vec{e}\rvert=\lvert m\vec{a}\rvert=m\lvert\vec{a}\rvert$ ∴ $1=m\lvert\vec{a}\rvert$ ∴ $m=\dfrac{1}{\lvert\vec{a}\rvert}$ ①に代入して$\vec{e}=\dfrac{\vec{a}}{\lvert\vec{a}\rvert}$ 忘れたら導くことが望ましい。
EX8 (1) $\vec{a}=(2,3)$, $\vec{b}=(-1,2)$のとき，$\vec{c}=(5,4)$を$\vec{a}$, $\vec{b}$を用いて表せ。  解 (1) ベクトルの実数倍の成分表示を用いて計算し，ベクトルの成分による相等条件を用いて求める。 (2) 始点を原点としたときのベクトルの成分は終点の座標となる。ベクトルの差を用いて成分表示し，斜辺の長さを求める。		解 (1) $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{a}\nparallel\vec{b}$であるからベクトル$\vec{c}$は，$\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$…①とただ1通りに表される。成分表示すると$(5,4)=m(2,3)+n(-1,2)$ $=(2m-n, 3m+2n)$ ベクトルの相等条件より $2m-n=5$, $3m+2n=4$ ∴$m=2$, $n=-1$…② ②を①に代入して　$\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$〃 (2) $A(-3,2)$, $B(2,5)$のとき，$\overrightarrow{AB}$を成分表示し，その大きさを求めよ。  解 (2) $\overrightarrow{AB}=(-3,2)$, $\overrightarrow{OB}=(2,5)$ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(2,5)-(-3,2)$ $=(2-(-3), 5-2)=(5,3)$ $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$〃	・EX8 (1) 任意のベクトルは2つのベクトルを用いて表すことができる。このことを使うことがまだ自分のものになっていない。 ・(2) $\overrightarrow{AB}$をベクトルの差を用いて表すことができないために解けない。	・2つのベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$を用いて $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$ と書けることに着目する。 ・和のベクトル$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$から差のベクトル$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$を導く。
EX9 (1) 平面上に3点，$A(3,-2)$, $B(7,-1)$, $C(-1,4)$がある。四角形$ABCD$が平行四辺形となるような点Dの座標を求めよ。 解 $D(x, y)$とおく平行四辺形の条件は，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ これを成分表示し，ベクトルの相等条件を用いてDを求める。		解 (1) 平行四辺形の条件は $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$　成分表示して $(7,-1)-(3,-2)=(-1,4)-(x, y)$ $(4,1)=(-1-x, 4-y)$ ベクトルの相等より $-1-x=4$, $4-y=1$ ∴$x=-5$, $y=3$ ∴$D(-5,3)$〃 	・EX9 (1) 平行四辺形の条件は向かい合う1組の辺が平行でかつ長さが等しいことがわかるがベクトル表示ができないために解けない。 (2) $\vec{a}=(3-2)$, $\vec{b}=(1,-4)$, $\vec{c}=(-1,2)$のとき，$\vec{a}+t\vec{b}$が$\vec{c}$と平行になるように実数tの値を求めよ。 解 (2) 1 $\vec{a}+t\vec{b}\parallel\vec{c}\Leftrightarrow\vec{a}+t\vec{b}=m\vec{c}$ これを成分表示し，ベクトルの相等条件を用いて，連立一次方程式をつくる。 2 連立一次方程式を解いてtの値を求める。 (2) 平行条件がとれなくて解けない。	・平行四辺形の条件は$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ (または$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$) であることに着目する。 解 EX9 (2) $\vec{a}+t\vec{b}\parallel\vec{c}$であるから $\vec{a}+t\vec{b}=m\vec{c}$となる。 成分表示して $(3,-2)+t(1,-4)=m(-1,2)$ $(3+t, -2-4t)=(-m, 2m)$ ベクトルの相等より $\begin{cases}3+t=-m\cdots①\\-2-4t=2m\cdots②\end{cases}$ m消去 ①×2＋②　$2(3+t)+(-2-4t)=0$ よって　$t=2$〃 ・平行条件 $\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{b}=m\vec{a}$ であることに着目する。

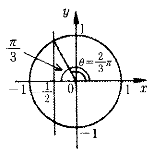
指導細案(No. 4)

<table>
<tr><th>問題，解法の手順</th><th>前提内容，関連事項</th><th>解法，技能，計算技術</th><th>誤り易い箇所</th><th>指導上の留意点</th></tr>
<tr>
<td>EX10 1辺の長さが2である正三角形ABCにおいて，辺BCの中点をMとする。次の内積を求めよ。
(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}$　(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$
解
・内積の定義を用いるとき，なす角に注意。
始点を同じに揃えたときの開きぐあいになることに着目</td>
<td>◦ベクトルの内積　$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, Oを始点　$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ とするとき，$\angle AOB=\theta$を $\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角という。
ただし$0\leqq\theta\leqq\pi$
・内積の定義
$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$を$\vec{a}$と$\vec{b}$の内積という。
$\vec{a}\cdot\vec{b}$で表す。　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$
$\vec{a}=\vec{0}$または$\vec{b}=\vec{0}$のとき$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$と定める。


Q4　下図について内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$を求めよ。


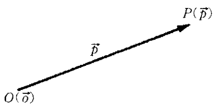
解 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot2\cdot\cos30^\circ=3\sqrt{3}$〃　(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot2\cdot\cos90^\circ=0$〃
(3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot2\cdot\cos135^\circ=-3\sqrt{2}$〃　(4) $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot2\cdot\cos180^\circ=-6$〃</td>
<td>解 内積の定義より $\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{AM}$のなす角は$\frac{60^\circ}{2}=30^\circ$，$BM=1$ ∴ $AM=\sqrt{3}$
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AM}|\cos30^\circ$
$=2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2$〃
$\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{BC}$のなす角 $180^\circ-60^\circ=120^\circ$
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cos120^\circ$
$=2\cdot2\cdot(-\cos60^\circ)$
$=2\cdot2\cdot(-\frac{1}{2})=-2$〃

</td>
<td>・なす角
(1)は始点が揃っているので，問題なく30°とできるが，(2)は60°として失敗する。</td>
<td>・なす角は始点を同じ点に揃えたときの有向線分の開きぐあいであるから(2)は$\overrightarrow{AB}$を始点Bに揃えたものをつくり，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}$となる点$D$をとることによって$\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{BC}$のなす角は $\overrightarrow{BD}$ と $\overrightarrow{BC}$ のなす角 $180^\circ-60^\circ=120^\circ$となることに留意して計算する。</td>
</tr>
<tr>
<td>EX11 (1)$\vec{a}=(2,3)$, $\vec{b}=(-1,4)$のとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$を求めよ。
(2) $\vec{a}=(\sqrt{6},\sqrt{2})$, $\vec{b}=(1,\sqrt{3})$のとき，$\vec{a}$, $\vec{b}$のなす角θを求めよ。
(3) $\vec{a}=(2,1)$に垂直で，大きさが5のベクトルを求めよ。
解
(1) 内積の成分表示を用いる。
(2) 内積の定義を変形して$\cos\theta$について解いた式に，内積やベクトルの大きさを成分表示により求めたものを代入して求める。
(3) 1 未知ベクトルを $\vec{b}=(x,y)$とおく。
2 垂直条件を成分表示する。次に大きさが5を成分表示する。
3 連立二次方程式を解いて答を得る。</td>
<td>・$\vec{a}\cdot\vec{b}$のなす角をθとするとき
〔1〕$0\leqq\theta<\frac{\pi}{2}$のとき　$\vec{a}\cdot\vec{b}>0$　〔2〕$\theta=\frac{\pi}{2}$のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$
〔3〕$\frac{\pi}{2}<\theta\leqq\pi$のとき　$\vec{a}\cdot\vec{b}<0$　　$\theta=\frac{\pi}{2}$のとき，$\vec{a}$と$\vec{b}$は垂直であるという。
$\vec{a}\perp\vec{b}$で表す。
・ベクトルの垂直と内積　$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$</td>
<td>解 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=(2,3)\cdot(-1,4)=2\cdot(-1)+3\cdot4=10$〃
(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ ∴ $\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$　…①
$|\vec{a}|=\sqrt{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$
$\vec{a}\cdot\vec{b}=(\sqrt{6},\sqrt{2})\cdot(1,\sqrt{3})=\sqrt{6}+\sqrt{6}=2\sqrt{6}$　…②
②を①に代入　$\cos\theta=\frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}\cdot2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$
$0\leqq\theta\leqq\pi$より　$\theta=\frac{\pi}{6}$〃


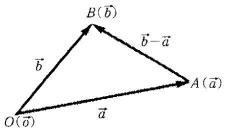
(3) 求めるベクトルを　$\vec{b}=(x,y)$とする。
$\vec{a}\perp\vec{b}$より　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ ∴ $(2,1)\cdot(x,y)=0$ ∴ $2x+y=0$ …①
$|\vec{b}|=5$より　$|\vec{b}|^2=25$　∴ $x^2+y^2=25$ …②
①より　$y=-2x$ …①′　①′を②に代入して整理すると
$5x^2=25$　　$x=\pm\sqrt{5}$ …③
③を①′へ代入して　$y=\mp2\sqrt{5}$（複号同順）
よって求めるベクトルは　$(\pm\sqrt{5},\mp2\sqrt{5})$（複号同順）〃</td>
<td>・内積の成分表示は難しいことではない。
・内積の式を変形しないで，直接利用して成分表示するものも出る。
・未知ベクトルを$\vec{b}=(x,y)$と成分表示する問題は始めてであり，慣れないうちはうまくとれない。</td>
<td>・$\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)$のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_1,a_2)\cdot(b_1,b_2)$
$=a_1b_1+a_2b_2$
・内積の式の場合はまとめたりすることはしないので，直接代入しても計算を複雑にすることはない。しかし，未知数$\cos\theta$について解いてから代入することが一般には計算を楽にすることが多いのでこの方法をとる。
・未知数を文字を用いて表し，方程式を立てて解法する方法を想起させ，この場合は未知ベクトルを $\vec{b}=(x,y)$と成分表示することが解法のポイントであることを押さえる。</td>
</tr>
<tr>
<td>EX12 (1) 次の等式が成り立つことを証明せよ。
$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$
(2) $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$のとき，ベクトル$2\vec{a}+3\vec{b}$の大きさを求めよ。
(3) 2つのベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$について，$|\vec{a}|=|\vec{b}|\neq0$で，ベクトル$2\vec{a}+\vec{b}$と$\vec{b}$が垂直であるとき，$\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角θを求めよ。
解
(1) $\vec{a}-\vec{b}=\vec{x}$とおいて，内積の性質　$|\vec{x}|^2=\vec{x}\cdot\vec{x}$
$(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{a}$
$=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{a}$
$\vec{b}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b}$
を用いて左辺を変形して右辺を導く。
(2) (1)にならって大きさ$|2\vec{a}+3\vec{b}|$の平方を求めた後，大きさを求める。
(3) 内積の定義で余弦の値を求めるために，条件と垂直条件を変形した式を用いる。</td>
<td>・内積の性質〔1〕　(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$　(2) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$ ($|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$)
(3) $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leqq|\vec{a}||\vec{b}|$
(1) は定義より，(2) は$\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角は0　$\cos0=1$より　(3) は$\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角をθとすると，　$-1\leqq\cos\theta\leqq1$であるから　$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leqq|\vec{a}||\vec{b}|$
・内積の成分表示　$\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)$のとき
$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$
〔証〕右図のように$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, $\angle AOB=\theta$とする。
余弦定理より　$2OA\cdot OB\cos\theta=OA^2+OB^2-AB^2$
ここで　$OA^2={a_1}^2+{a_2}^2$, $OB^2={b_1}^2+{b_2}^2$,
$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}=(b_1-a_1,b_2-a_2)$より
$AB^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2$
①において　左辺$=2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=2\vec{a}\cdot\vec{b}$
右辺$=({a_1}^2+{a_2}^2)+({b_1}^2+{b_2}^2)-(b_1-a_1)^2-(b_2-a_2)^2=2(a_1b_1+a_2b_2)$
∴ $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$（終）〃


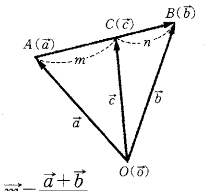
・ベクトルのなす角　$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$　なす角をθとする。
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$より　$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2}}$　$(0\leqq\theta\leqq\pi)$
・ベクトルの垂直条件　$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2=0$
・内積の性質　(4) $(m\vec{a})\cdot\vec{b}=m(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(m\vec{b})$ (m：実数)
(5) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$　(6) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$（成分を用いて示せる）
・ベクトルの平行条件
$\vec{a}/\!/\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$または$-|\vec{a}||\vec{b}|\Leftrightarrow a_1b_2-a_2b_1=0$（$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$を成分表示すると示すことができる）</td>
<td>解 (1)〔証〕左辺$=|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})-\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{b})$
$=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$
$=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=$右辺
よって　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$〃（終）
(2) $|2\vec{a}+3\vec{b}|^2=(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}+3\vec{b})=2\vec{a}\cdot(2\vec{a}+3\vec{b})+3\vec{b}\cdot(2\vec{a}+3\vec{b})$
$=4|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2$ …①
$|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$を　①に代入して
$|2\vec{a}+3\vec{b}|^2=4\cdot1+12\cdot(-1)+9\cdot4=28$
よって　$|2\vec{a}+3\vec{b}|=2\sqrt{7}$〃
(3) 内積の定義より　$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ …①
条件より　$|\vec{a}|=|\vec{b}|$ …②
$2\vec{a}+\vec{b}\perp\vec{b}$であるから
$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}=0$ ∴ $2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=0$
∴ $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{2}|\vec{b}|^2$ …③
②，③を①に代入して　$\cos\theta=\frac{-\frac{1}{2}|\vec{b}|^2}{|\vec{b}|^2}=-\frac{1}{2}$　$(0\leqq\theta\leqq\pi)$
∴ $\theta=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$〃

</td>
<td>・内積と絶対値を結びつけた式 $|\vec{x}|^2=\vec{x}\cdot\vec{x}$や数における分配・交換法則の適用が不慣れでうまく証明できない。
・大きさ$|2\vec{a}+3\vec{b}|$は直接には求められない。平方を求める発想は(1)の証明で用いたものであるがなかなか気づかない。
・成分を用いてなす角θを求める計算はEX11の(2)で既習であるが，ここでは定義そのものから求めることが要求され，抽象的で難しい。</td>
<td>・ベクトルは数についての乗法公式に類した等式が成り立つ。
内積と絶対値が直結
$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$
交換法則　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
実数倍
$(m\vec{a})\cdot\vec{b}=m(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\vec{a}\cdot m\vec{b})$
分配法則
$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$
$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$
・内積と絶対値が直結した式 $|\vec{x}|^2=\vec{x}\cdot\vec{x}$ に着目することが大切である。
・内積の定義から，なす角θの余弦に関する等式が実数値にならないとθの値が求められないことに気づく。そのためには条件$|\vec{a}|=|\vec{b}|$が成り立っているから，垂直条件から内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$が$|\vec{a}|$か$|\vec{b}|$に置換することが必要不可欠であると捉える。</td>
</tr>
</table>

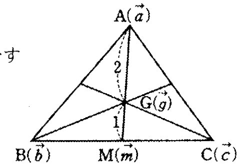
指導細案(No.5)

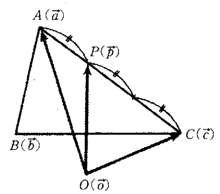
<table>
<tr><th>問題，解法の手順</th><th>前提内容，関連事項</th><th>解法，技能，計算技術</th><th>誤り易い箇所</th><th>指導上の留意点</th></tr>
<tr>
<td>EX13 3点$A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$を頂点とする△ABCの重心を$G(\vec{g})$とするとき，$\vec{g}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$を用いて表せ。
解 辺BCの中点を$M(\vec{m})$とするとき，重心Gは中線AMを2:1に内分する点である。
・中点$M(\vec{m})$，中線AMを2:1に分ける内分点の公式を用いる。</td>
<td rowspan="3">◦位置ベクトル
平面上で定点Oをとると，任意の点Pの位置は $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$によって定まる。$\vec{p}$をOを基準とする点Pの位置ベクトルという。点Pの位置ベクトルが$\vec{p}$であることを$P(\vec{p})$と表す。
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$であるから，2点$A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$に対して $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$
ベクトル$\overrightarrow{AB}$は終点Bの位置ベクトルから始点Aの位置ベクトルを引いた差である。
◦分点の位置ベクトル
・2点$A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$を結ぶ線分ABをm:nに内分する点$C(\vec{c})$とするとき，$\vec{c}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$で表される。
〔証〕$\vec{c}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$
$=\vec{a}+\frac{m}{n+n}(\vec{b}-\vec{a})$
$=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$ (終)〃
・線分ABの中点$M(\vec{m})$の位置ベクトルは $\vec{m}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$
・線分ABをm:nに外分する点$D(\vec{d})$は $\vec{d}=\frac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$ $(m\neq n)$
Q5 異なる2点$A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$に対し，線分ABを3:1の比に内分する点Pと外分する点Qの位置ベクトル $\vec{p}$, $\vec{q}$をそれぞれ$\vec{a}$, $\vec{b}$を用いて表せ。
解 $\vec{p}=\frac{\vec{a}+3\vec{b}}{3+1}=\frac{\vec{a}+3\vec{b}}{4}$〃，$\vec{q}=\frac{-\vec{a}+3\vec{b}}{3-1}=\frac{-\vec{a}+3\vec{b}}{2}$〃
・3点A, B, Cが1直線上にある⇔$\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AB}$となる実数mがある。
Q6 平行四辺形ABCDの辺BCを3:1に内分する点をE，辺CDを1:4に外分する点をFとすると，3点A, E, Fは1直線上にあることを示せ。
〔証〕示すこと：$\overrightarrow{AF}=m\overrightarrow{AE}$となる実数mが存在すること。
点Aを始点とする位置ベクトルを$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$とする。
$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{b}+\vec{d}$ …①
EはBCを3:1に内分するから
$\overrightarrow{AE}=\frac{\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{3+1}=\frac{\vec{b}+3(\vec{b}+\vec{d})}{4}=\frac{4\vec{b}+3\vec{d}}{4}$ (∵①) …②
FはCDを1:4に外分するから
$\overrightarrow{AF}=\frac{-4\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}}{1-4}=\frac{-4(\vec{b}+\vec{d})+\vec{d}}{1-4}=\frac{4\vec{b}+3\vec{d}}{3}$ …③
②，③より $4\vec{b}+3\vec{d}=4\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AF}$ ∴$\overrightarrow{AF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AE}$
したがって，3点A, E, Fは1直線上にある。(終)〃</td>
<td>解 $M(\vec{m})$は辺BCの中点であるから
$\vec{m}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$ …①
重心$G(\vec{g})$は中線AMを2:1の比に内分するから
$\vec{g}=\frac{\vec{a}+2\vec{m}}{2+1}$ …②
①を②に代入
$\vec{g}=\frac{\vec{a}+2\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)}{3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$〃</td>
<td>・重心は3中線の交点であり，1つの中線AMを2:1の比の内分点であることは既習である。</td>
<td>・中点，内分点の公式 $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$，$\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$を用いて，重心$G(\vec{g})$を求めることができる。</td>
</tr>
<tr>
<td>EX14 △ABCと点Pがあり，等式 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}$が成り立つとき，点Pはどんな位置にあるか。
解 3定点，未知ベクトルを$A(\vec{a}), B(\vec{b}), C(\vec{c}), P(\vec{p})$のように位置ベクトルで表す。
・$\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{AB}$を位置ベクトルを用いて表わし，与式に代入し，未知ベクトル$\vec{p}$について解く。
別解 頂点Aを基準とする位置ベクトルで表示して解く。解と比較して点Aを始点にとると位置ベクトル$\vec{a}$がなくなる分，計算量が少なくなる。</td>
<td>解 $A(\vec{a}), B(\vec{b}), C(\vec{c}), P(\vec{p})$と位置ベクトルで表す。
$\overrightarrow{PA}=\vec{a}-\vec{p}$, $\overrightarrow{PB}=\vec{b}-\vec{p}$,
$\overrightarrow{PC}=\vec{c}-\vec{p}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$
これらを等式 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}$
に代入して
$(\vec{a}-\vec{p})+(\vec{b}-\vec{p})+(\vec{c}-\vec{p})=\vec{b}-\vec{a}$
これを$\vec{p}$について解くと
$3\vec{p}=2\vec{a}+\vec{c}$ ∴$\vec{p}=\frac{2\vec{a}+\vec{c}}{3}$
よって 点Pは辺ACを1:2の比に内分する点〃
別解 Aを始点とする位置ベクトルを $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AP}=\vec{p}$ をとる。
$\overrightarrow{PA}=-\vec{p}$, $\overrightarrow{PB}=\vec{b}-\vec{p}$, $\overrightarrow{PC}=\vec{c}-\vec{p}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$
これらを等式 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}$ に代入して
$-\vec{p}+(\vec{b}-\vec{p})+(\vec{c}-\vec{p})=\vec{b}$ ∴$3\vec{p}=\vec{c}$, ∴$\vec{p}=\frac{1}{3}\vec{c}$
よって 点Pは辺ACを1:2の比に内分する点〃</td>
<td>・2つのベクトル
$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$をとり，$\overrightarrow{AP}$を$\vec{b}$, $\vec{c}$で表わそうとすると難しい。
この場合は$\overrightarrow{AP}=\vec{p}$とおいて $\overrightarrow{PA}=-\overrightarrow{AP}=-\vec{p}$,
$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP}=\vec{b}-\vec{p}$,
$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP}=\vec{c}-\vec{p}$
これらを等式に代入して
$-\vec{p}+(\vec{b}-\vec{p})+(\vec{c}-\vec{p})=\vec{b}$
∴ $3\vec{p}=\vec{c}$ ∴ $\vec{p}=\frac{1}{3}\vec{c}$
これは頂点Aを始点にとった別解の解答と同じになる。このように未知ベクトル$\overrightarrow{AP}=\vec{p}$とおかないと解けない。</td>
<td>・位置ベクトルを用いて表わすと内分点，外分点の公式から点Pの位置が捉え易いことに着目する。
・位置ベクトルを表示する場合，2つの場合が考えられる。
(i) 任意の点Oを始点にとり$A(\vec{a}), B(\vec{b}), C(\vec{c})$などで表す。解の場合
(ii) 頂点Aを始点にとり$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$などで表す。別解の場合
(i) は計算の見通しが立て易い有利さがあり，
(ii) は計算量が少なくてすむ利点がある。</td>
</tr>
<tr>
<td>EX15 △ABCの辺ABを2:3の比に内分する点をP，辺BCを3:1の比に外分する点をQ，辺CAを1:2の比に内分する点をRとするとき，3点P, Q, Rは1直線上にあることを示せ。
〔証〕示すこと：$\overrightarrow{PR}=m\overrightarrow{PQ}$となる実数mが存在すること。点Aを始点にとり，点B, Cの位置ベクトル，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$とする。このとき，内分点，外分点の公式を用いて$\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AR}$の位置ベクトルが定まる。
次に $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}$
$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AP}$
を用いて位置ベクトルで表示する。
$\overrightarrow{PR}=m\overrightarrow{PQ}$となる実数mがとれることを示せばよい。</td>
<td>〔証〕Aを始点にとる。
$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，とおく。
PはABを2:3に内分するから
$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}=\frac{2}{5}\vec{b}$ …①
QはBCを3:1に外分するから
$\overrightarrow{AQ}=\frac{-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{3-1}=\frac{-\vec{b}+3\vec{c}}{2}$ …②
RはCAを1:2に内分するから
$\overrightarrow{AR}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\vec{c}$ …③
$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=\frac{-\vec{b}+3\vec{c}}{2}-\frac{2}{5}\vec{b}=\frac{-9\vec{b}+15\vec{c}}{10}=\frac{3(-3\vec{a}+5\vec{c})}{10}$ …④
$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\vec{c}-\frac{2}{5}\vec{b}=\frac{-6\vec{b}+10\vec{c}}{15}=\frac{2(-3\vec{a}+5\vec{c})}{15}$ …⑤
④，⑤より $-3\vec{a}+5\vec{c}=\frac{10}{3}\overrightarrow{PQ}=\frac{15}{2}\overrightarrow{PR}$
∴$\overrightarrow{PR}=\frac{4}{9}\overrightarrow{PQ}$
したがって，3点P, Q, Rは1直線上にある。(終)〃</td>
<td>・EX14で経験したように任意の点Oを始点にとるより，頂点の1つ（例えばA）を始点にとると計算量が少なくなる利点があることに着目して始点をAにとり，位置ベクトルを用いて証明しようとする。しかし，示すことが明確でないために論を展開していくことが難しい。
・内分点の公式はまずミスなく使えるが，外分点の公式は慣れて確実に用いるまで手間取る。
・$\overrightarrow{PR}$を$\overrightarrow{PQ}$で表すことを難しく感じる。</td>
<td>・示すこと：$\overrightarrow{PR}=m\overrightarrow{PQ}$となる実数mが存在すること。
このことを明確にして証明を推進していく。
また，$\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PQ}$も始点をAとしたときの位置ベクトル，$\vec{b}$, $\vec{c}$を用いて表示して筋道立ったものにしていく。
・内分点$P(\vec{p})$
$\vec{p}=\frac{3\vec{a}+2\vec{b}}{2+3}$ 分子は対角線上の積の和
・外分点$Q(\vec{q})$
3:(−1)に分けると考える。
$\vec{q}=\frac{(-1)\vec{a}+3\vec{b}}{3+(-1)}$
分子はやはり対角線上の積の和
・④，⑤のように$-3\vec{a}+5\vec{c}$を括り出して，これについて解くと容易である。</td>
</tr>
</table>

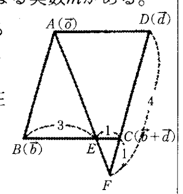


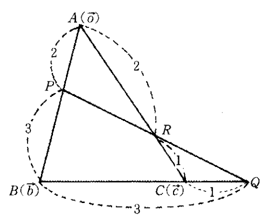


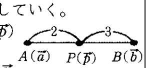


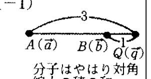






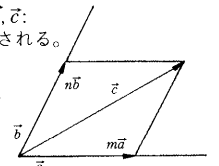


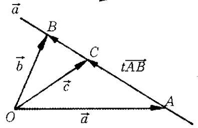


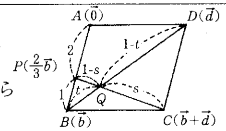


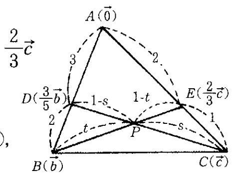
指導細案(No. 6)

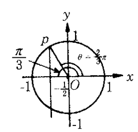
問題，解法の手順	前提内容，関連事項	解法，技能，計算技術	誤り易い箇所	指導上の留意点
E×16　平行四辺形$ABCD$の辺ABを2：1に内分する点をPとし，線分PCとBDの交点をQとする。$\overrightarrow{AQ}$ を $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ と $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ を用いて表せ。 解　任意のベクトルは2つのベクトルで表される。点Pは線分PC上，BD上にあるから，$CQ:QP=s:(1-s)$，$BQ:QD=t:(1-t)$とすると$\overrightarrow{AQ}$は2通りに表される。一意性から2つのベクトル$\vec{b},\vec{d}$の係数が等しいことより解を得る。	◦交点の位置ベクトル $\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0},\vec{a}\not\parallel\vec{b},\vec{c}$: 平面上の任意のベクトル は次の形に表される。 $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$($m$，$n$：実数) この表し方はただ1通りである。 $m\vec{a}+n\vec{b}=m'\vec{a}+n'\vec{b}\Leftrightarrow m=m',n=n'$ 特に $m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow m=n=0$ •点Cが直線AB上にあるとき $\overrightarrow{AC}$はある実数tを用いて$\overrightarrow{AC}=t\overrightarrow{AB}$ と表される。位置ベクトルを用いて $\therefore\vec{c}-\vec{a}=t(\vec{b}-\vec{a})$ $\therefore\vec{c}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}=\dfrac{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}}{t+(1-t)}$ 点Cは，線分ABを$t:(1-t)$の比に分ける。	解　点Aを始点とする位置ベクトルは $\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AD}=\vec{d},\overrightarrow{AC}=\vec{b}+\vec{d},\overrightarrow{AP}=\dfrac{2}{3}\vec{b}$ 点Qは，線分CP，BDの両方の上にあるから $CQ:QP=s:1-s$　とすると $\overrightarrow{AQ}=(1-s)(\vec{b}+\vec{d})+s\cdot\dfrac{2}{3}\vec{b}=(1-\dfrac{1}{3}s)\vec{b}+(1-s)\vec{d}$ …① また，$BQ:QD=t:1-t$　とすると　$\overrightarrow{AQ}=(1-t)\vec{b}+t\vec{d}$ …② ①，②において，$\vec{b}\neq\vec{0},\vec{d}\neq\vec{0},\vec{b}\not\parallel\vec{d}$より $1-\dfrac{1}{3}s=1-t,1-s=t$　辺々加えてsを求めると$s=\dfrac{3}{4}$，$\therefore t=\dfrac{1}{4}$ $t=\dfrac{1}{4}$を②に代入して　$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{3}{4}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{d}$ 〃	•点Qは線分CP上，BD上にあることを2つの位置ベクトルを用いて表すことが容易にできない。 •一意性（ただ1通りに表される）がうまく使えない。	• $CQ:QP=s:(1-s)$とすると $\overrightarrow{AQ}=(1-s)\overrightarrow{AC}+s\overrightarrow{AP}$ $BQ:QD=t:(1-t)$とすると $\overrightarrow{AQ}=(1-t)\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AD}$ と表されることを押さえる。 •2つのベクトルが1次独立（$\vec{0}$でない2つのベクトルが平行でない）のとき，係数が等しいことに着目する。
EX×17　次の直線の媒介変数表示による方程式を求めよ。 (1)点$P_0(1,2)$を通り，方向ベクトルが$\vec{u}=(4,3)$の直線 (2)2点$A(-2,3),B(1,-1)$を通る直線 (3)点$P_0(2,3)$を通り，法線ベクトルが$\vec{n}=(5,2)$の直線 (4) 2直線$x+\sqrt{3}y-1=0$，$x-\sqrt{3}y+4=0$のなす鋭角αを求めよ。 解　(1)は1定点と方向ベクトル，(2)は2定点，(3)は1定点と法線ベクトルの公式を用いる。(4)は2直線それぞれの法線ベクトルのなす角θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$について求めた後直線のなす角αについて求める。	Q7　△ABCにおいて，辺ABを3：2の比に内分する点をD，辺ACを2：1の比に内分する点をEとし，線分CDとBEの交点をPとする。$\overrightarrow{AP}$を$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$と$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$を用いて表せ。 解　点$A$を始点とする位置ベクトルは $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\dfrac{3}{5}\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\dfrac{2}{3}\vec{c}$ 点Pは線分CD，BEの両方の上にある $CP:PD=s:1-s$，$BP:PE=t:1-t$ とすると$\overrightarrow{AP}=(1-s)\vec{c}+s\cdot\dfrac{3}{5}\vec{b}$…①， $\overrightarrow{AP}=(1-t)\vec{b}+t\cdot\dfrac{2}{3}\vec{c}$…② $\vec{a}\not\parallel\vec{0}$，$\vec{b}\not\parallel\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$より，①，②において$\dfrac{3}{5}s=1-t,1-s=\dfrac{2}{3}t$ $\therefore 3s=5-5t,3-3s=2t$　辺々加えてtを求めると $t=\dfrac{2}{3}$，$\therefore s=\dfrac{4}{9}$，$t=\dfrac{2}{3}$を②に代入して$\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{4}{9}\vec{c}$ 〃	解　(1)ベクトル方程式　$\vec{p}=\vec{p_0}+t\vec{u}$…①　$\vec{p}=(x,y),\vec{p_0}=(1,2)$ $\vec{u}=(4,3)$，これらの成分を①に代入して $(x,y)=(1,2)+t(4,3)=(1+4t,2+3t)$　$\therefore\begin{cases}x=1+4t\\y=2+3t\end{cases}$ 〃 (2)方向ベクトル$\vec{u}$は$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(1,-1)-(-2,3)=(3,-4)$ $\vec{p}=(x,y)$，$\vec{p_0}$に相当するのは$\overrightarrow{OA}=(-2,3)$これらの成分を①に代入して$(x,y)=(-2,3)+t(3,-4)=(-2+3t,3-4t)$ $\therefore\begin{cases}x=-2+3t\\y=3-4t\end{cases}$ 〃 (3)点$P_0(\vec{p_0})$を通り，法線ベクトルが$\vec{n}$のベクトル方程式は $\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{p_0})=0$…①　$\vec{p}=(x,y),\vec{p_0}=(2,3),\vec{n}=(5,2)$ これらの成分を①に代入　$(5,2)\cdot(x-2,y-3)=0$ $\therefore 5(x-2)+2(y-3)=0$　$\therefore 5x+2y-16=0$ 〃 (4) 2直線それぞれの法線ベクトル， $\vec{n_1}=(1,\sqrt{3}),\vec{n_2}=(1,-\sqrt{3})$のなす角を$\theta$とすると内積の定義から $cos\theta=\dfrac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{\|\vec{n_1}\|\|\vec{n_2}\|}=\dfrac{1-3}{\sqrt{1+3}\sqrt{1+3}}=-\dfrac{1}{2}$ $\therefore\theta=\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2}{3}\pi$ $\therefore\alpha=\pi-\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{\pi}{3}$ 〃	•方向ベクトルが与えられたときが(1)，方向ベクトルが$\overrightarrow{AB}$であるととらえると(2)，法線ベクトルが与えられたときが(3)であると見抜くことにより，公式を適用することによって容易に解法できる。 •2直線のなす角αはベクトルを用いて求めることは始めてで見当がつかない。 公式　2直線のなす角α $(0\leqq\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2})$ $y=m_1x+b_1,y=m_2x+b_2$が正軸の正の向きとなす角をθ_1,θ_2とする。 $(\theta_1<\theta_2<\pi)$ 2直線のなす角$\alpha=\theta_2-\theta_1$ $m_1=tan\theta_1,m_2=tan\theta_2$ $tan\alpha=tan(\theta_2-\theta_1)$ $=\dfrac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}$	•(1)は$\vec{p}=\vec{p_0}+t\vec{u}$ (2)は$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$ $\vec{p_0}\to\vec{a}$に変化 $\therefore\vec{p}=\vec{a}+t(\vec{b}-\vec{a})$ (3)は$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{p_0})=0$ これらのベクトル方程式を成分表示することにより解を得る。 •法線ベクトルのなす角に帰着できると難しくない。 •2直線のなす角α $0\leqq\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}$， 法線ベクトルのなす角$\theta$ $0\leqq\theta\leqq\pi$に注意 - - - - - - - - - - •(4)の別解 2直線を変形して $y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x+\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ 傾き はそれぞれ $-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 公式より $tan\alpha=\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1+(-\dfrac{1}{\sqrt{3}})\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$ $=\sqrt{3}$ $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ 〃
E×18 (1)点$P(x_0,y_0)$と直線 $l:ax+by+c=0$ の距離dは，次の式で与えられることをベクトルを用いて示せ。 $d=\dfrac{\|ax_0+by_0+c\|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 〔証〕Pからlへの垂線の足を$H(x_1,y_1)$，直線lの法線ベクトルを$\vec{n}=(a,b)$とすると$\overrightarrow{HP}/\!/\vec{n}$より内積$\overrightarrow{HP}\cdot\vec{n}$の絶対値は$\|\overrightarrow{HP}\|\|\vec{n}\|$となる。 $d=\|\overrightarrow{HP}\|$で与えられる。 $\therefore d=\dfrac{\|\overrightarrow{HP}\cdot\vec{n}\|}{\|\vec{n}\|}$で求められる。 Hは直線l上の点より$ax_1+by_1+c=0$を用いて変形する。	◦ベクトル方程式 •直線と方向ベクトル 定点$P_0(\vec{p_0})$を通り，$\vec{o}$でないベクトル$\vec{u}$に平行な直線をl，l上の点を$P(\vec{p})$とする。(t：実数) $\overrightarrow{AP}\parallel\vec{u}$　$\therefore\overrightarrow{AP}=t\vec{u}$　$\therefore\vec{p}-\vec{p_0}=t\vec{u}$ $\therefore\vec{p}=\vec{p_0}+t\vec{u}$…① ①は方向ベクトル$\vec{u}$，直線$l$のベクトル方程式という。 •成分表示　点$O$を原点　$P_0(x_0,y_0),P(x,y),u=(a,b)$とすると $\vec{p_0}=(x_0,y_0),\vec{p}(x,y)$であるから ①は$(x,y)=(x_0,y_0)+t(a,b)$ $\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\end{cases}$…② ②は媒介変数$t$，直線$l$の媒介変数表示という。 •2点を通る直線 2点$A(\vec{a}),B(\vec{b})$を通る直線$l$は$A(\vec{a})$を通り， $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$を方向ベクトルとする直線，$l$上の点を$P(\vec{p})$とすると $\vec{p}=\vec{a}+t(\vec{b}-\vec{a})$　$\therefore\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$ $1-t=s$とおくと　$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b},s+t=1$と表すこともできる。	証　右図のように$PH\perp l,H(x_1,y_1)$，法線ベクトル$\vec{n}=(a,b)$とすると， $\overrightarrow{HP}=(x_0-x_1,y_0-y_1)$，$\overrightarrow{HP}/\!/\vec{n}$であるから $\overrightarrow{HP}\cdot\vec{n}=\begin{cases}\|\overrightarrow{HP}\|\|\vec{n}\|cos0°=\|\overrightarrow{HP}\|\|\vec{n}\|\\\|\overrightarrow{HP}\|\|\vec{n}\|cos180°=-\|\overrightarrow{HP}\|\|\vec{n}\|\end{cases}$ $\therefore\|\overrightarrow{HP}\cdot\vec{n}\|=\|\overrightarrow{HP}\|\|\vec{n}\|$ $\therefore d=\|\overrightarrow{HP}\|=\dfrac{\|\overrightarrow{HP}\cdot\vec{n}\|}{\|\vec{n}\|}$ $=\dfrac{\|a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)\|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{\|ax_0+by_0-(ax_1+by_1)\|}{\sqrt{a^2+b^2}}$…① 点$H$は直線$l$上の点であるから　$ax_1+by_1+c=0$ $\therefore ax_1+by_1=-c$…② ②を①に代入して　$d=\dfrac{\|ax_0+by_0+c\|}{\sqrt{a^2+b^2}}$（終）〃	•$d=\|\overrightarrow{HP}\|$を求める問題であるが直線$l$の法線ベクトルと関連づけてとらえることは難しい。 •$H(x_1,y_1)$は直線l上にあることを式表示できない。このために分子にcが入ってこないままの式である。	•ベクトル$\overrightarrow{HP}/\!/\vec{n}$であるから内積の絶対値 $\|\overrightarrow{HP}\cdot\vec{n}\|=\|\overrightarrow{HP}\|\|\vec{n}\|$ $\therefore\vec{d}=\|\overrightarrow{HP}\|=\dfrac{\|\overrightarrow{HP}\cdot\vec{n}\|}{\|\vec{n}\|}$ で与えられる。 •$H(x_1,y_1)$は $ax+by+c=0$を満たすから$ax_1+by_1+c=0$ $ax_1+by_1=-c$が成り立つことを利用してdの式変形から示す式を導く。

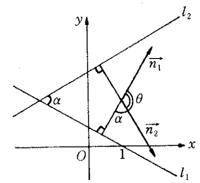


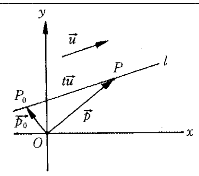


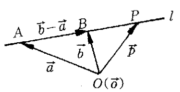


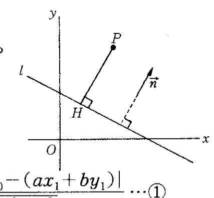




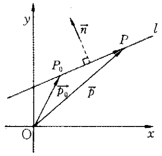
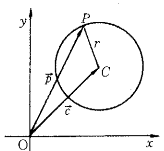
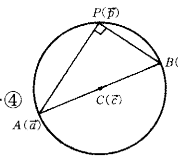
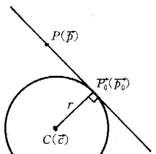




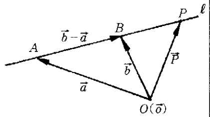
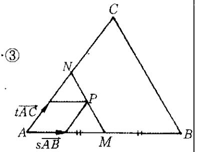


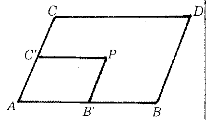


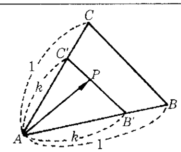
指導細案(№ 7)

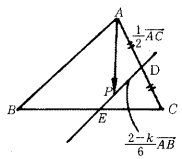
問題，解法の手順	前提内容，関連事項	解法，技能，計算技術	誤り易い箇所	指導上の留意点
EX18 (2)点(2, −3)と直線 $3x-4y-8=0$ の距離を求めよ。 解 点 $P(x_0, y_0)$ と直線 $\ell: ax+by+c=0$ の距離 d は公式 $d=\dfrac{\|ax_0+by_0+c\|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ を使う。	◦直線と法線ベクトル 法線ベクトル…直線と垂直な $\vec{0}$ でないベクトルをいう。 定点 $P_0(\vec{p_0})$ を通り，法線ベクトルが $\vec{n}$ の直線 ℓ，ℓ 上の点を $P(\vec{p})$ とする。 $\vec{n}\perp\overrightarrow{P_0P}$，$\overrightarrow{P_0P}=\vec{p}-\vec{p_0}$ $\therefore \vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{p_0})=0$ …①  ①は法線ベクトル $\vec{n}$，直線 ℓ のベクトル方程式という。 ・成分表示　点 O を原点，$P_0(x_0, y_0)$，$P(x, y)$，$\vec{n}=(a, b)$ とすると $\vec{p}-\vec{p_0}=(x-x_0, y-y_0)$， $\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{p_0})=a(x-x_0)+b(y-y_0)$ ①は $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$ …②　ここで $c=-ax_0-by_0$ とおけば②は $ax+by+c=0$ と書き直される。 ・法線ベクトル $\vec{n}$　直線 $ax+by+c=0$ において $\vec{n}=(a, b)$ は法線ベクトル	解 点と直線の距離公式　$d=\dfrac{\|ax_0+by_0+c\|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ …① 直線 ℓ　$3x-4y-8=0$ の法線ベクトル　$\vec{n}=(3, -4)$，$x_0=2$，$y_0=-3$，$a=3$，$b=-4$ これらを①に代入 $d=\dfrac{\|6+12-8\|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{10}{5}=2$〃	・公式の暗記はなかなか難しい。練習問題を通して自分のものにすることができる。	・距離の公式で分子は c が現れた時点で垂線の足の座標が消えて点 $P(x_0, y_0)$ の座標が直線 ℓ の式に残ったもの 分母は法線ベクトルの大きさ $\sqrt{a^2+b^2}$ になっている。
EX19 定点 $A(\vec{a})$ と $B(\vec{b})$ を直径の両端とする円 C のベクトル方程式を求めよ。 解 中心 $C(\vec{c})$，半径を r とする。点 C は線分 AB の中点，r は直径 AB の半分であるから $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表す。円周上の任意の点を $P(\vec{p})$ とすると $\|\overrightarrow{CP}\|=r$ が成り立つ。 別解 $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP}$ $\therefore \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$	◦円のベクトル方程式 点 $C(\vec{c})$ を中心とし，半径が r である円の周上の任意の点を $P(\vec{p})$ とすれば $\|\overrightarrow{CP}\|=r$　$\therefore \|\vec{p}-\vec{c}\|=r$ …① ①の両辺を平方して内積を用いて表すと，$(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=r^2$ …②  ①，②をともに円 C のベクトル方程式という。 ・成分表示　$\vec{p}=(x, y)$，$\vec{c}=(a, b)$ とすれば $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$	解 円の中心 $C(\vec{c})$，半径を r，円周上の点を $P(\vec{p})$ とするとベクトル方程式は　$\|\vec{p}-\vec{c}\|=r$ …① C は AB の中点　$\vec{c}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ …② r は $AB=\|\vec{b}-\vec{a}\|$ の半分　$r=\dfrac{\|\vec{b}-\vec{a}\|}{2}$ …③ ②，③を①に代入 $\left\|\vec{p}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right\|=\dfrac{\|\vec{b}-\vec{a}\|}{2}$〃 …④  別解・垂直より，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$ が成り立つ $\therefore (\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$ …⑤ ・④の両辺を平方 $\left(\vec{p}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)\cdot\left(\vec{p}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)=\dfrac{(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a})}{4}$ $\therefore \|\vec{p}\|^2-(\vec{a}+\vec{b})\vec{p}+\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，したがって⑤が成り立つ ④と⑤は同値	・円のベクトル方程式は中心と半径の位置ベクトルがきまれば求められる。中点や直径の長さがうまく求められない。 ・直径に対する円周角は直角であることは中学で扱っている。⑤を導くのは難しいことではない。	・内分点の公式でも中点はよく使うので特別に公式として取扱っている。 また，長さについて $\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}=\vec{b}-\vec{a}$ を押さえてから $\|\overrightarrow{AB}\|=\|\vec{b}-\vec{a}\|$ を段階的に導いている。これらのことを想起させる。 ・④式の両辺の平方から内積の計算をして整理すると⑤式が導かれる。
EX20 平面上の定点 $A(\vec{a})$ と任意の点 $P(\vec{p})$ に対し，次のベクトル方程式で表される円の中心の位置ベクトルと半径を求めよ。ただし $\vec{a}\neq\vec{0}$ とする。 (1) $\|2\vec{p}-\vec{a}\|=\|\vec{a}\|$ (2) $(\vec{p}+\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$ 解 円のベクトル方程式の標準形は $\vec{p}$ の係数が 1 で $\|\vec{p}-\vec{a}\|=r$ 中心 $A(\vec{a})$，半径 r の円を表す。	Q8　平面上の定点 $A(\vec{a})$ と任意の点 $P(\vec{p})$ に対し，次のベクトル方程式で表される円の中心の位置ベクトルと半径を求めよ。 (1) $\|\vec{p}-\vec{a}\|=1$　(2) $\|3\vec{p}-\vec{a}\|=3$ 解 $\|\vec{p}-\vec{c}\|=r$ は中心 $C(\vec{c})$，半径 r のベクトル方程式を表す。 (1) 中心 $A(\vec{a})$，半径 1 (2) $\vec{p}$ の係数が3であるから　両辺を3で割って $\left\|\vec{p}-\dfrac{1}{3}\vec{a}\right\|=1$ よって中心 $A'\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}\right)$，半径 1	解 (1) $\vec{p}$ の係数を 1 にするために等式の両辺を2で割る。 $\left\|\vec{p}-\dfrac{\vec{a}}{2}\right\|=\dfrac{\|\vec{a}\|}{2}$ 中心 $A'\left(\dfrac{\vec{a}}{2}\right)$，半径 $\dfrac{\|\vec{a}\|}{2}$〃 (2) $(\vec{p}+\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$ $\therefore \|\vec{p}\|^2-\|\vec{a}\|^2=0$ $\therefore \|\vec{p}\|=\|\vec{a}\|$　$\|\vec{p}-\vec{o}\|=\|\vec{a}\|$ 中心 $O(\vec{o})$，半径 $\|\vec{a}\|$〃 別解 $\{\vec{p}-(-\vec{a})\}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$ $A'(-\vec{a})$，$A(\vec{a})$ とすると $\overrightarrow{A'P}\cdot\overrightarrow{AP}=0$ $\therefore \overrightarrow{A'P}\perp\overrightarrow{AP}$　$PA\perp PA'$ $A(\vec{a})$ と $A'(-\vec{a})$ を直径の両端とする円，中心 $O(\vec{o})$，半径 $\|\vec{a}\|$〃	・標準形 $\|\vec{p}-\vec{a}\|=r$ を導かないで(1) $\|2\vec{p}-\vec{a}\|=\|\vec{a}\|$ から直接に中心，半径を求めようとして失敗する。 ・(2)はEX19の別解にあるように２定点を直径の両端とする円としてとらえる者もいる。	・$\|2\vec{p}-\vec{a}\|=\|\vec{a}\|$ の $\vec{p}$ の係数が２であるから両辺を２で割って $\vec{p}$ の係数を１とする標準形を導く。 ・変形によって標準形を導く方法では内積と大きさを直結する式 $\vec{p}\cdot\vec{p}=\|\vec{p}\|^2$ を押さえる。 ・円周角が直角であることから２定点を直径の両端とする円となることを押さえる。
EX21 (1)点 $C(\vec{c})$ を中心とする半径 r の円の周上の点 $P_0(\vec{p_0})$ における接線のベクトル方程式は，その接線上の任意の点を $P(\vec{p})$ として $(\vec{p_0}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=r^2$ と表されることを示せ。 〔証〕円のベクトル方程式が成り立っている。…① 点 $P_0(\vec{p})$ は方程式を満たすこと。また，接線の条件として接線⊥半径を内積＝0を用いて表示してできる式…② これら２式の差をとることによって示す式を導く。	EX21 別証 (i) 半径 $CP_0\perp$ 接線 P_0P より $\overrightarrow{CP_0}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0$ …① 左辺 $=(\vec{p_0}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=\overrightarrow{CP_0}\cdot\overrightarrow{CP}$ $=\overrightarrow{CP_0}\cdot(\overrightarrow{CP_0}+\overrightarrow{P_0P})$ $=\|\overrightarrow{CP_0}\|^2+\overrightarrow{CP_0}\cdot\overrightarrow{P_0P}$ $=\|\overrightarrow{CP_0}\|^2=r^2=$ 右辺（∵①） $\therefore (\vec{p_0}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=r^2$　(終)〃	証　$C(\vec{c})$ を中心とする式は $\|\vec{p}-\vec{c}\|=r$ …① 点 $P_0(\vec{p_0})$ は①上にあるから $\|\vec{p_0}-\vec{c}\|=r$ …② 接線 $PP_0\perp$ 半径 CP_0　$\therefore \overrightarrow{PP_0}\cdot\overrightarrow{CP_0}=0$ $\therefore (\vec{p_0}-\vec{p})\cdot(\vec{p_0}-\vec{c})=0$ $\therefore \|\vec{p_0}\|^2-(\vec{p}+\vec{c})\cdot\vec{p_0}+\vec{p}\cdot\vec{c}=0$ …③  ②の両辺を平方して　$\|\vec{p_0}\|^2-2\vec{p_0}\cdot\vec{c}+\|\vec{c}\|^2=r^2$ …②' ②'−③　$\vec{p_0}\cdot\vec{p}-\vec{p_0}\cdot\vec{c}-\vec{p}\cdot\vec{c}+\|\vec{c}\|^2=r^2$ $\therefore \vec{p_0}\cdot(\vec{p}-\vec{c})-\vec{c}(\vec{p}-\vec{c})=r^2$ $\therefore (\vec{p_0}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=r^2$　(終)〃	・円のベクトル方程式は接線⊥半径を内積条件を用いて示すが，点 $P_0(\vec{p_0})$ が円のベクトル方程式を満たしていることを忘れると，示すべき式が導かれない。 ・〔別証〕(ii) $\overrightarrow{CP_0}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0$ …① $\overrightarrow{P_0P}=\overrightarrow{CP}-\overrightarrow{CP_0}$ を①に代入 $\overrightarrow{CP_0}\cdot(\overrightarrow{CP}-\overrightarrow{CP_0})=0$ $\overrightarrow{CP_0}\cdot\overrightarrow{CP}-\|\overrightarrow{CP_0}\|^2=0$ $\therefore \overrightarrow{CP_0}\cdot\overrightarrow{CP}=\|\overrightarrow{CP_0}\|^2=r^2$ $\therefore (\vec{p_0}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=r^2$ (終)〃	・軌跡の問題と同様に点 $P(\vec{p})$ は $\|\vec{p}-\vec{c}\|=r$ を満たしているから $\|\vec{p_0}-\vec{c}\|=r$ が成り立つ。 ・接線の条件：接線⊥半径は押さえておく。 ・２つの式の差に着目して導く。 ・〔別証〕(i)では左辺の変形でベクトルの和 $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CP_0}+\overrightarrow{P_0P}$ を用いた。 (ii)では垂直条件である内積＝0を変形する過程でベクトルの差 $\overrightarrow{P_0P}=\overrightarrow{CP}-\overrightarrow{CP_0}$ を用いた。

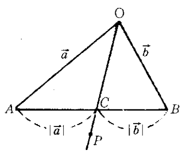
指導細案(No. 8)

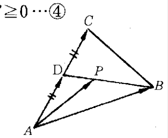
問題, 解法の手順	前 提 内 容, 関 連 事 項	解 法, 技 能, 計 算 技 術	誤り易い箇所	指導上の留意点
EX21 (2) 次の円上の各点における接線の方程式を求めよ。 (1)円$x^2+y^2=5$の上の点 (1, 2) (2)円$(x-2^2)+(y+3)^2=8$の上の点 (4, −1) 解 円$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$の上の点$P_0(x_0, y_0)$における接線は$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$	・接線のベクトル方程式 $(\overrightarrow{p_0}-\overrightarrow{c})\cdot(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{c})=r^2$…① $\overrightarrow{p}=(x, y)$, $\overrightarrow{c}=(a, b)$, $\overrightarrow{p_0}=(x_0, y_0)$を①に代入すると $(x_0-a, y_0-b)\cdot(x-a, y-b)=r^2$ $\therefore (x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$ 。ベクトルの図形への応用 ・ベクトル方程式の応用 2点$A(\overrightarrow{a})$, $B(\overrightarrow{b})$を通るベクトル方程式は 1定点$A(\overrightarrow{a})$を通り, 方向ベクトルが $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}$の直線 $\overrightarrow{p}=\overrightarrow{a}+t(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a})$ $\therefore \overrightarrow{p}=(1-t)\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$…①  点Pは線分ABを$t:(1-t)$の比に分ける。 $1-t=s$とおくと, ①は$\overrightarrow{p}=s\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$ ただし $s+t=1$ ここで, $s\geqq 0$, $t\geqq 0$のとき $0\leqq t\leqq 1$である。①において 〔1〕$0\lt t\lt 1$のとき$1-t\gt 0$より点Pは線分ABを$t:(1-t)$の比に内分する。 〔2〕$t=0$, 1のとき点PはそれぞれA, Bに一致 よって$0\leqq t\leqq 1$のとき点Pは線分AB上にある。 線分ABのベクトル方程式は $\overrightarrow{p}=s\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$, $s+t=1$, $s\geqq 0$, $t\geqq 0$ (点Pが線分AB上にある)	解 接点$P_0(x_0, y_0)$における接線は $(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$ (1) $a=b=0$, $r^2=5$のとき, $x_0x+y_0y=r^2$…① $x_0=1$, $y_0=2$, を①に代入して $x+2y=5$ (2) $a=2$, $b=-3$, $r^2=8$のとき $(x_0-2)(x-2)+(y_0+3)(y+3)=8$ $x_0=4$, $y_0=-1$を代入して $(4-2)(x-2)+(-1+3)(y+3)=8$ $\therefore 2(x-2)+2(y+3)=8$ $\therefore x+y=3$ 〃	・(1) は$a=b=0$の特殊な場合でとまどう。 ・(2) は一般的な形で公式をそのまま利用できる。	・変形 $(x-0)^2+(y-0)^2=r^2$ 接点(x_0, y_0)における接線は$(x_0-0)(x-0)+(y_0-0)(y-0)=r^2$ ・公式を用いたままで答としないでx, yについての1次式の形でまとめておく
EX22 (1) 1直線上にない3点A, B, Cがある。$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$…①とおく。実数s, tが次の条件を満たしながら動くとき, 点Pの存在する範囲を求めよ。 $s+t=\frac{1}{2}$, $s\geqq 0$, $t\geqq 0$…② 解 $\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$, $s+t=1$, $s\geqq 0$, $t\geqq 0$⇔点Pは線分BC上にある。これを利用するために$s+t=\frac{1}{2}$の両辺を2倍, ①の右辺を変形する。		解 ②で$s+t=\frac{1}{2}$の両辺を2倍して$2s+2t=1$ $2s=s'$, $2t=t'$とおくと②より$s'+t'=1$, $s'\geqq 0, t'\geqq 0$…③ ①より$\overrightarrow{AP}=2s\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)+2t\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$ $=s'\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)+t'\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$…④  2辺AB, ACの中点をそれぞれM, Nとすると, $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ これらを④に代入して$\overrightarrow{AP}=s'\overrightarrow{AM}+t'\overrightarrow{AN}$…⑤ ③, ⑤より点Pの存在する範囲は, 2辺AB, ACの中点を両端とする線分MN 〃	・$s+t=1$が成り立つとき点Pは直線BC上さらに$s\geqq 0$, $t\geqq 0$のとき線分BC上がいえる。これを利用しようとするが方針がたたない。 ・①の$\overrightarrow{AP}$もs', t'で表すことが容易でない。 ・$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$のままで点Pの存在する範囲を考えることは容易なことでない。	・$s+t=\frac{1}{2}$の両辺を2倍して2s, 2tを他の文字s', t'で置換すると①も$s\overrightarrow{AB}=2s\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ $=s'\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)$, $t\overrightarrow{AC}=2t\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$ $=t'\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$とs', t'を用いて表されることに着目する。 ・$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AN}$と置換すると, $\overrightarrow{AP}=s'\overrightarrow{AM}+t'\overrightarrow{AN}$となり存在する範囲が線分MNとなり, 容易にとらえられる。
EX22 (2) 1直線上にない3点A, B, Cがある。$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$…①とおく。実数s, tが次の条件を満たしながら動くとき, 点Pの存在する範囲を求めよ。 $s+t\leqq 1$, $s\geqq 0, t\geqq 0$…② 解 $0\leqq s+t\leqq 1$と不等号になっているので$s+t=k$ $(0\lt k\leqq 1)$と置換してkを固定して考える。この両辺をkで割る。①の右辺を変形する。次にkを0から1まで動かして点Pの存在する範囲を求める。	Q9 1直線上にない3点A, B, Cがある。$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$…①とおく。実数s, tが次の条件を満たしながら動くとき, 点Pの存在する範囲を求めよ。 $0\leqq s\leqq 1, 0\leqq t\leqq 1$ 解 $s\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB'}$ $t\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC'}$とおくと ①より$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AC'}$…② ②より点Pは平行四辺形AB'PC' $(\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{C'P})$の頂点 $0\leqq s\leqq 1$, $0\leqq t\leqq 1$であるから, B'は AからBまで, C'はAからCまで動くから, B'は線分AB上, C'は線分AC上にある。点Pの存在する範囲は平行四辺形ABDC$(\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD})$の内部または周上にある。 Q10 定三角形ABCがある。実数kに対して, 点Pが $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{2-k}{6}\overrightarrow{AB}$ を満たしている。 (1)kが実数全体を動くとき, 点Pの軌跡を求めよ。 (2)点Pが三角形ABCの内部にあるようなkの値の範囲を求めよ。	解〔1〕$s=t=0$のとき, 点Pは点Aに一致する。 〔2〕$k\neq 0$のとき ②で$s+t=k$ $(0\lt k\leqq 1)$とおく この両辺をkで割って $\frac{s}{k}+\frac{t}{k}=1$ ①より$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}=\frac{s}{k}(k\overrightarrow{AB})+\frac{t}{k}(k\overrightarrow{AC})$ $\frac{s}{k}=s'$, $\frac{t}{k}=t'$, $k\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB'}$, $k\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC'}$ とおくと①, ②は$\overrightarrow{AP}=s'\overrightarrow{AB'}+t'\overrightarrow{AC'}$, $s'+t'=1$, $s'\geqq 0, t'\geqq 0$…③ ③より点Pは線分B'C'を動く。 さらに, kは$0\lt k\leqq 1$の範囲を動くから線分B'C'は頂点Aを除いて△ABCの内部及び周上を動く。 したがって, 点Pの存在する範囲は, △ABCの内部及び周 〃	・$s+t\leqq 1$のように等号でなく不等号になると解法の方針を立てられない。 ・$k\overrightarrow{AB}$, $k\overrightarrow{AC}$のままで点Pの存在する範囲をとらえづらい。	・$s+t=k$とおいてまずkを固定してとらえる。$s'+t'=1$にするために$\frac{s}{k}=s'$, $\frac{t}{k}=t'$とおく。 ②も $s\overrightarrow{AB}=\frac{s}{k}(k\overrightarrow{AB})$ $=s'(k\overrightarrow{AB})$, $t\overrightarrow{AC}=\frac{t}{k}(k\overrightarrow{AC})$ $=t'(k\overrightarrow{AB})$とs', t'を用いて表されることに着目する。 ・$k\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB'}$, $k\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC'}$とおくと $\overrightarrow{AP}=s'\overrightarrow{AB'}+t'\overrightarrow{AC'}$となり存在する範囲が線分B'C'となり, 容易に捉えられる。
EX22 (3) 1直線上にない3点A, B, Cがある。$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$…①とおく。実数s, tが次の条件を満たしながら動くとき, 点Pの存在する範囲を求めよ。 (ア) $s+2t=1$, $s\geqq 0$, $t\geqq 0$ …② (イ) $s+2t=3$, $s\geqq 0$, $t\geqq 0$…③ 解 (ア) $s+2t=1$を$s+t'=1$にするために$2t=t'$とおく。 ①の右辺を $t\overrightarrow{AC}=2t\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$ $=t'\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$と変形する。 (イ) $s'+t'=1$とするために③の両辺を3で割る。$\frac{1}{3}s+\frac{2}{3}t=1$, $\frac{1}{3}s=s'$, $\frac{2}{3}t=t'$とおく。①の右辺を$s\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}s(3\overrightarrow{AB})$, $t\overrightarrow{AC}$ $=\frac{2}{3}t\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}\right)$と変形する。	解 (1) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$, kは実数全体を動くから $\frac{2-k}{6}$も実数全体を動く$\frac{2-k}{6}=t$とおけば $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}+t\overrightarrow{AB}$ 辺CAの中点Dを通り辺ABに平行な直線 〃 (2) △ABCの内部 $\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$において $s\gt 0$, $t\gt 0$, $0\lt s+t\lt 1$, このことより $\frac{2-k}{6}\gt 0, 0\lt \frac{2-k}{6}+\frac{1}{2}\lt 1$ $\therefore -1\lt k\lt 2$ 〃 ・△AOBの2等分線OCのベクトル方程式 右図で$AC:CB=\lvert\overrightarrow{a}\rvert:\lvert\overrightarrow{b}\rvert$, PをOC上の点とすると $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OC}$ $\therefore \overrightarrow{p}=s\left(\frac{\lvert\overrightarrow{b}\rvert\overrightarrow{a}+\lvert\overrightarrow{a}\rvert\overrightarrow{b}}{\lvert\overrightarrow{a}\rvert+\lvert\overrightarrow{b}\rvert}\right)=t(\lvert\overrightarrow{b}\rvert\overrightarrow{a}+\lvert\overrightarrow{a}\rvert\overrightarrow{b})$ 〃 $\left(\frac{s}{\lvert\overrightarrow{a}\rvert+\lvert\overrightarrow{b}\rvert}=t\right)$	解 (ア) ②で$2t=t'$とおくと②より$s+t'=1$, $s\geqq 0$, $t'\geqq 0$…④ ①より$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+2t\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$, $=s\overrightarrow{AB}+t'\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$…⑤ $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$となる点Dをとる。⑤に代入して $\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t'\overrightarrow{AD}$…⑥ ④, ⑥より点Pの存在する範囲は線分BD 〃 (イ) ③で$s+2t=3$の両辺を3で割って$\frac{1}{3}s+\frac{2}{3}t=1$ $\frac{1}{3}s=s'$, $\frac{2}{3}t=t'$とおくと ②より$s'+t'=1$, $s'\geqq 0, t'\geqq 0$…⑦ ①より$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}s(3\overrightarrow{AB})+\frac{2}{3}t\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}\right)$ $=s'(3\overrightarrow{AB})+t'\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}\right)$…⑧ $3\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$, $\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}$とおくと ⑧は$\overrightarrow{AP}=s'\overrightarrow{AD}+t'\overrightarrow{AE}$…⑨ ⑦, ⑨より点Pの存在する範囲は線分DE 〃	・$s+2t=1$を$s+t=1$に変形はできない。 ・$\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$のままでは点Pの存在する範囲を示しづらい。 ・(1)で$s+t=\frac{1}{2}$の両辺を2倍する発想が自分のものになっていなくてうまく変形できない。$s'+t'=1$がつくれない。 ・$3\overrightarrow{AB}$, $\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$のままで点Pの存在する範囲が示しづらい。	・2tを他の文字t'で置換すると$s+t'=1$がつくられることに着目する。このとき, ①も $t\overrightarrow{AC}=2t\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=t'\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$ とt'を用いて表される。 ・$\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$と置換すると $\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t'\overrightarrow{AD}$ 存在する範囲が線分BDとなり, 容易に示すことができる。 ・$s+2t=3$の右辺を1にする発想を用いて変形する。$\frac{1}{3}s$, $\frac{2}{3}t$を他の文字s', t', で置換すると$s'+t'=1$がつくられることに着目する。 ・$3\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$, $\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}$と置換することによって, 存在する範囲が線分DEとなり, 容易に示すことができる。

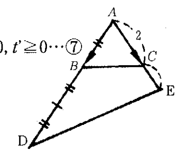












指導細案(No. 9)

問題，解法の手順	前提内容，関連事項	解法，技能，計算技術	誤り易い箇所	指導上の留意点
EX23 四角形$ABCD$において，$AB^2+CD^2=BC^2+AD^2$ ならば 対角線ADとBDは直交することを証明せよ。 解 示すこと：$\vec{AC}\cdot\vec{BD}=0$ Aを始点として B, C, D を位置ベクトルで表す。等式を用いて変形して導く。	・内積と図形の性質 Q11 中線定理 $AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$ が成り立つことを示せ。 〔証〕△ABCにおいて，辺BCの中点をM，$\vec{AB}=\vec{b}$，$\vec{AC}=\vec{c}$とおく。 $\vec{AM}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$，$\vec{BM}=\vec{AM}-\vec{AB}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\vec{b}=\frac{\vec{c}-\vec{b}}{2}$ 右辺$=2(\lvert\vec{AM}\rvert^2+\lvert\vec{BM}\rvert^2)=2\left(\frac{\lvert\vec{b}+\vec{c}\rvert^2}{4}+\frac{\lvert\vec{b}-\vec{c}\rvert^2}{4}\right)$ $=2\left(\frac{\lvert\vec{b}\rvert^2+2\vec{b}\cdot\vec{c}+\lvert\vec{c}\rvert^2}{4}+\frac{\lvert\vec{b}\rvert^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+\lvert\vec{c}\rvert^2}{4}\right)=\lvert\vec{b}\rvert^2+\lvert\vec{c}\rvert^2$ $=(\lvert\vec{AB}\rvert^2+\lvert\vec{AC}\rvert^2)=$右辺 ゆえに $AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$ (終)〃	解 $\vec{AB}=\vec{b}$，$\vec{AC}=\vec{c}$，$\vec{AD}=\vec{d}$とおく。 $AB^2=\lvert\vec{AB}\rvert^2=\lvert\vec{b}\rvert^2$，$CD^2=\lvert\vec{CD}\rvert^2=\lvert\vec{d}-\vec{c}\rvert^2$ $BC^2=\lvert\vec{BC}\rvert^2=\lvert\vec{c}-\vec{b}\rvert^2$ $AD^2=\lvert\vec{AD}\rvert^2=\lvert\vec{d}\rvert^2$ これらを条件式に代入して $\lvert\vec{b}\rvert^2+\lvert\vec{d}-\vec{c}\rvert^2=\lvert\vec{c}-\vec{b}\rvert^2+\lvert\vec{d}\rvert^2$ ∴$\lvert\vec{b}\rvert^2+(\vec{d}-\vec{c})\cdot(\vec{d}-\vec{c})$ $=(\vec{c}-\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{b})+\lvert\vec{d}\rvert^2$ 展開して整理すると $-2\vec{c}\cdot\vec{d}=-2\vec{c}\cdot\vec{b}$ ∴$\vec{c}\cdot(\vec{d}-\vec{b})=0$ ∴$\vec{AC}\perp\vec{BD}$ よって 対角線AC，BDは直交する。〃	・Q11はAからBCに垂線ADを引いて直角三角形の3平方の定理を用いて証明するのがスタンダードであるが，Aを基準とする2つの位置ベクトルを用いるとスムーズにできるよさを生かす。しかし4点があるから，EX23はQ11のように位置ベクトルを2つ定めただけではうまくいかない。 ・CD，BCの位置ベクトルがうまくとれないためにCD^2，BC^2がベクトルで表されない。	・Aを基準とする3点B, C, Dの位置ベクトルを定める。 ・$\vec{CD}=\vec{AD}-\vec{AC}$，$\vec{BC}=\vec{AC}-\vec{AB}$ のように位置ベクトルの着で表される。 また$CD^2=\lvert d-c\rvert^2$ $=(\vec{d}-\vec{c})\cdot(\vec{d}-\vec{c})$，$\vec{BC}=\lvert\vec{c}-\vec{b}\rvert^2$ $=(\vec{c}-\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{b})$ のように内積の計算を用いて示すことに向かって変形する。
EX24 (1)△OABにおいて，$\vec{OA}=\vec{a}$，$\vec{OB}=\vec{b}$，とするとき，三角形の面積Sは次のように表されることを示せ。 $S=\frac{1}{2}\sqrt{\lvert\vec{a}\rvert^2\lvert\vec{b}\rvert^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$ (2)3点$O(0, 0)$，$A(4, 2)$，$B(-1, 1)$を頂点とする三角形の面積Sを求めよ。 (1)〔証〕$\angle AOB=\theta$とおくと，Sは2辺夾角を用いた面積公式を用いて表される。内積の定義を用いてθを消去する。 (2) 解 3頂点（原点を含む）の面積公式を(1)から導いて解く	・三角形の面積と内積 Q12 Oを原点とし$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$とすると△OABの面積Sは $S=\frac{1}{2}\lvert x_1y_2-x_2y_1\rvert$ で与えられることを示せ。 〔証〕EX24 (1) によると $S=\frac{1}{2}\sqrt{\lvert\vec{a}\rvert^2\lvert\vec{b}\rvert^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$…① $\lvert\vec{a}\rvert^2=x_1^2+y_1^2$，$\lvert\vec{b}\rvert^2=x_2^2+y_2^2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=(x_1, y_1)\cdot(x_2, y_2)=x_1y_2+y_1y_2$ $\lvert\vec{a}\rvert^2\lvert\vec{b}\rvert^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)-(x_1x_2+y_1y_2)^2$ $=x_1^2y_2^2-2x_1x_2y_1y_2+x_2^2y_1^2$ $=(x_1y_2-x_2y_1)^2$…② ②を①に代入して $S=\frac{1}{2}\lvert x_1y_2-x_2y_1\rvert$ (終)〃	(1)〔証〕△$AOB=\theta(0\leqq\theta<\pi)$とおくと$\vec{OA}=\vec{a}$，$\vec{OB}=\vec{b}$をであるから $S=\frac{1}{2}\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\sin\theta$…① 内積の定義より $\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert}$ 三角関数の相互関係より $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$ $=\sqrt{1-\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{(\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert)^2}}=\frac{\sqrt{\lvert\vec{a}\rvert^2\lvert\vec{b}\rvert^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}}{\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert}$…② ②を①に代入して $S=\frac{1}{2}\sqrt{\lvert\vec{a}\rvert^2\lvert\vec{b}\rvert^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$〃 (2) 解 原点を含む3頂点の面積公式 $S=\frac{1}{2}\lvert x_1y_2-x_2y_1\rvert$…① $x_1=4$，$y_1=2$，$x_2=-1$，$y_2=1$を代入して $S=\frac{1}{2}\lvert 4\cdot1-2\cdot(-1)\rvert=\frac{1}{2}\lvert 6\rvert=3$〃	・面積は三角関数で既習であるが自分のものとなっていない者もいる。 ・θを消去するために内積の定義を用いること，さらに等式 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$を利用することまでを見通すことは難しい。 ・成分表示による $S=\frac{1}{2}\lvert x_1y_2-x_2y_1\rvert$は EX24 (1) から導かれる。これを用いず(1)の三角関数の式に直接代入して求める者もいる。	・$S=\frac{1}{2}BC\cdot AH$ $=\frac{1}{2}ca\sin B$ 右図より導く。 これをベクトルで表す。 ・$(\vec{a}, \vec{b})=\lvert\vec{a}\rvert, \lvert\vec{b}\rvert$ $\times\cos\theta$より導く。 $0<\theta<\pi$より$\sin\theta>0$，相互関係より$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$と変形した式に内積の定義を用いて導いた式を代入して証明する。 ・直接代入すると複雑な計算となる。ミスもし易くなる。ここでは成分による公式を導いて後代入すると簡単に求められる。
EX25 2点A，Pの点Oを基準とする位置ベクトルをそれぞれ$\vec{a}$，$\vec{p}$とする。次のことを証明せよ。 (1) Aに関して，点Pと対称な点を$Q(\vec{q})$とすると $\vec{q}=2\vec{a}-\vec{p}$ (2) 直線OAに関して，点Pと対称な点を$R(\vec{r})$とすると $\vec{r}=\frac{2\vec{p}\cdot\vec{a}}{\lvert\vec{a}\rvert^2}\vec{a}-\vec{p}$ 〔証〕(1)点Aは線分PQの中点，またはベクトルとして $\vec{PA}=\vec{AQ}$ (2) 直線OAと線分PRの交点をHとする。次の2つの事柄が成り立つ。 〔1〕$OH\perp PH$ 〔2〕$R(\vec{r})$はHに関して対称な点。 〔1〕についてはベクトルの内積を用いて表す。 〔2〕については(1)を利用。	・共線条件 PがAB上にある⇔$\vec{AP}=k\vec{AB}$ (k：実数) ⇔$\vec{OP}=s\vec{OA}+t\vec{OB}$，$s+t=1$ (s, t：実数) ・メネラウスの定理 △ABCの3辺BC，CA，ABまたはそれらの延長が，三角形の頂点を通らない1つの直線と交わる点をそれぞれP, Q, Rとすると $\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$ が成り立つ ・チェバの定理 △ABCの3頂点A, B, Cと三角形の辺またはその延長上にない1つの点Sを結ぶ直線が，辺BC，CA，ABまたはその延長と交わる点をそれぞれP, Q, Rとすると $\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$ が成り立つ。 Q13 △OABの2辺OA，OBをそれぞれ3：1，4：1の比に内分する点をD，Cとし，ACとBDの交点をPとする。OPとABの交点をQとする。$\vec{OA}=\vec{a}$，$\vec{OB}=\vec{b}$とおくとき，$\vec{OP}$，$\vec{OQ}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ。 解 △ODBと直線ACについて メネラウスの定理より $\frac{OA}{AD}\cdot\frac{DP}{PB}\cdot\frac{BC}{CO}=1$ ∴$\frac{4}{1}\cdot\frac{DP}{PB}\cdot\frac{1}{4}=1$ ∴$\frac{DP}{PB}=1$ PはDBの中点 $\vec{OP}=\frac{\vec{OD}+\vec{OB}}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\vec{a}+\vec{b}\right)=\frac{3}{8}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$〃	証 (1) Aは線分PQの中点であるから $\vec{a}=\frac{\vec{p}+\vec{q}}{2}$ ∴$\vec{q}=2\vec{a}-\vec{p}$ 〃(終) 〔別証〕$\vec{PA}=\vec{AQ}$が成り立つから $\vec{a}-\vec{p}=\vec{q}-\vec{a}$ ∴$\vec{q}=2\vec{a}-\vec{p}$ (終) (2) 直線OAと線分PRの交点をHとする。 点Hは直線OA上にあるから $\vec{OH}=t\vec{a}$…① $OH\perp PH$であるから $\vec{OH}\cdot\vec{PH}=0$…② $\vec{PH}=\vec{OH}-\vec{OP}=t\vec{a}-\vec{p}$…③ ①，③を②に代入して $t\vec{a}\cdot(t\vec{a}-\vec{p})=0$ $t(t\lvert\vec{a}\rvert^2-\vec{p}\cdot\vec{a})=0$ $t\neq0$より$t=\frac{\vec{p}\cdot\vec{a}}{\lvert\vec{a}\rvert^2}$…④ また，$R(\vec{r})$は$H$にかんして$P$と対称な点である。 (1)より $\vec{r}=2t\vec{a}-\vec{p}$…⑤ ④を⑤に代入して$\vec{r}=\frac{2\vec{p}\cdot\vec{a}}{\lvert\vec{a}\rvert^2}\vec{a}-\vec{p}$ (終)〃	・(1)はAが中点であること，ベクトルとして$\vec{PA}=\vec{PQ}$が成り立つこと，どちらに着目しても難しいことはない。 (2)HがOA上にあるとき$\vec{OH}=t\vec{a}$と表されることに着目できるがこのtを求めることや(1)を利用することが閃かない。 ・Q13の別解 $\vec{a}$，$\vec{b}$は1次独立より $\vec{OP}=x\vec{a}+y\vec{b}$ と表される。PはAC，BDの両方の上にあるから $\vec{OP}=x\vec{OA}+y\cdot\frac{5}{4}\vec{OC}$から $x+\frac{5}{4}y=1$ $\vec{OP}=x\cdot\frac{4}{3}\vec{OD}+y\vec{OB}$から $\frac{4}{3}x+y=1$ これを解いて $x=\frac{3}{8}$，$y=\frac{1}{2}$ ∴$\vec{OP}=\frac{3}{8}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$〃 ・Q13の$\vec{OQ}$について 解 △$OAB$においてチェバの定理より $\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{BC}{CO}\cdot\frac{OD}{DA}=1$ ∴$\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{1}=1$ ∴$\frac{AQ}{QB}=\frac{4}{3}$ ∴$AQ:QB=4:3$ ∴$\vec{OQ}=\frac{3\vec{a}+4\vec{b}}{7}$ ・別解 QはOP上にあるから $\vec{OQ}=k\vec{OP}=k\left(\frac{3}{8}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)$ $=\frac{3}{8}k\vec{a}+\frac{1}{2}k\vec{b}$ QはAB上にあるから$\frac{3}{8}k+\frac{1}{2}k=1$ ∴$k=\frac{8}{7}$ ∴$\vec{OQ}=\frac{3\vec{a}+4\vec{b}}{7}$〃	・中点の公式$\vec{PA}$，$\vec{AQ}$を位置ベクトルで表されることを用いることに慣れてきている。 ・垂直条件からtが求まること，$R(\vec{r})$は$H(t\vec{a})$に関してPと対称点であることより (1)が利用できることに着目する。 ・Q13はQ6でベクトルを用いて解いた解法の他に同じベクトルを用いた解法でも別解，またメネラウスの定理やチェバの定理を利用した解法解があることを知ることによって解法の幅が広がる。