「複素数と複素数平面」の指導に関する一考察

金山　　證*

A Consideration of the Teaching of "Complex Number and Complex Plane "

Satoru KANAYAMA

Abstract

"Complex Number and Complex Plane "are essential consept which are applicable in the field of differential and integral calculus as the basis of the advanced function of the complex variable . The auther , however , finds that the chapters on "Complex Number and Complex Plane " in text books are poor in content and that there are much to be supplemented including examples . This is the reason that the auther focuses on the subject here . In this paper the auther points out an effective way of teaching "Complex Number and Complex Plane " to college students by selecting important 27 examples and introducing a detailed teaching plan (pp. 95 - 103) in accordance with the students' levels of attainment .

1．はじめに

(1)　教材としての「複素数と複素数平面」

「複素数と複素数平面」は高等学校では昭和39年の教科書改訂の際に新しく取り入れられた教材である。しかし，昭和48年の改訂では教材の精選・集約という趣旨から省かれた。教材が複素変数関数の基礎・基本だけに終始して発展性のないものとして終わっていたことが削除の原因の一つに上げられる。そして平成6年の改訂で復活したものである。にもかかわらず，平成15年の年次別の改訂では「複素数と複素数平面」は削除される。復活した時点では，複素数，2項方程式の解法による代数的側面ばかりでなく，複素数の導入により幾何学的な考察を通してその有用性，及び数学的な方法や考え方の理解を深めることに重点が置かれたのであったが，今回は中学からの移行内容の位置付けと従前の必履修科目の内容の見直しという観点から検討が進められ削除された。高専では教材として取り上げられて間もない，「複素数と複素数平面」は必要最小限のものしか取り扱われていない。補充しなくてはいけない内容も多々ある。

(2)　学生の実態

高専の授業時数は制限があるために，授業がややもすれば講義形式の型通りになりがちで，授業だけで学生が将来必要な数学をマスターするということはますます困難になりつつあるのが現状である。

「複素数と複素数平面」は高専の3年生で学ぶ。学年が上がるにつれて自主的・積極的に学習する学生が少なくなり，地道な学習活動ができない学生が多くなる。全般に数学の学習に対する消極的な面が目につく。発想や数学的感覚を大事にしたり，継続的な学習を促したりするために，各章の学習が終了すると，随時章末にある練習問題の解答レポートの提出，また，傍用問題集の既習内容に相当する問題の解答レポートの長期休暇を利用しての提出を義務付けている。高専数学の教科書では「問」における問題の主流である計算問題は，大部分が定理や公式を確認する基本的なものである。数は少ないが，適当な例題も与えないで，やや程度が高く，難しい問題が章末の練習問題や傍用問題集にある。章末の問題の数問であるが教科書の例題だけでは解けない。また，傍用問題集に至っては，計算や解法の応用の能力がつくと思われる問題であるが学

*一般教科

（平成15年3月31日受付）

生は解けない。問題によるが一歩も前へ進めない状態に陥る。質問すべきことが多くて困っている学生，そこで解くことを放棄してしまう学生も少なくない。

学生はどのような問題に対しても独力で解決したり，確実に理解できなくなっている。

2　研究の趣旨

高校生向きの教科書の「複素数と複素数平面」の取り扱いを調べてみると，それぞれに多少の違いがあって細部においては必ずしも同じではない。高専生向きの教科書は必要最小限のものしか取り扱っていない。概念の解説や例題の解法については，理論の展開も浅く，深く追求するまでに至らず，問題解法に結びつかない場合も少なくない。特に，複素数と多角形は解説もなく章末の問題が与えられているだけに留まっている。このために補充すべき内容も多く，第一に最適な例題の補足をしなくてはいけない。この観点から，現行の教科書を精査し，重要な項目を精選して，「複素数と複素数平面」の本質に触れながら，基礎から応用までの実力がつくという方針で指導細案をまとめ，指導実践を試みる。

3　研究の内容

(1)　教師の願い

① 教科書，問題集の隅々までをマスターする。

② 教科書及び問題集の各問題が解ける。

(2)　例題の選定

「複素数と複素数平面」を扱う基礎となる性質等，種々の形式，内容別に例題２７題を選定する。「複素数と複素数平面」の各分野を網羅し，本質に触れたり，理解を深めたり，考え方や基本的な手法を身につけたり，計算や解法・証明のコツをつかんだり，上級学年で学習する複素変数関数に十分耐え得る力をつけたりできるように，普遍的・代表的な重要例題を厳選する。また，「問」に続く練習問題や傍用問題集を学生が独力で解けるようにそれらの解法に適した例題も取り上げる。解法については簡潔で，要領を得た記述に徹して模範解答に心掛ける。別解は積極的に取り上げる。多面的で豊富な解法が身につき，「複素数と複素数平面」の解法の幅を広げたり，理論に対する再発見・認識につなげたり，他の分野に応用したりできる真の力をつけたい。

4　歴史的覚え書き

学生に興味を起こさせ，かつ持続させる一端として各章の冒頭の授業でこの章で学習する内容の概略，及び，それに伴う歴史的覚え書きを取り込むことも大切である。しかし，実際は授業で取り扱うことができないのが事実である。

A.　エピソード

1545年イタリアのカルダノ（1501-1576）は，「代数の法則に関する大技術」を出版し，その中で３次方程式の解法を載せた。その方法によると，$x^3+ax+b=0$ の解は $w=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ として次のように表される。

$$w^r\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3+\left(\frac{b}{2}\right)^2}-\frac{b}{2}}$$

$$-w^{-r}\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3+\left(\frac{b}{2}\right)^2}+\frac{b}{2}} \qquad r=0,1,2$$

特に $\left(\dfrac{a}{3}\right)^3+\left(\dfrac{b}{2}\right)^2<0$ のとき，異なる３つの実数解となるが，上の解の公式では，$r=0$ の場合でも虚数を取り扱わなければならない。これが虚数導入の契機となった。このように，虚数導入の契機が２次方程式ではなく３次方程式であったことは興味あることである。

18世紀頃，複素数が数学で取り扱われ始めた。ノルウェーのヴェッセル（1745-1818）は1797年に，スイスのアルガン（1768-1822）は1806年にそれぞれ独立に複素数平面の考えを発表したが，当初はあまり注目されなかった。その後，ガウス（1777-1855）は1811年，友人ヴェッセルへの手紙の中で，実数が数直線の点で表されるように，複素数は座標平面上の点で表されると書き記した。現在では複素数平面をガウス平面と呼ぶこともある。このようにして虚数は視覚的に捉えられ。そのような数は存在しないという古い考えは捨てられた。

B.　複素数の歴史的発展

16世紀頃，２次方程式を解く過程で現れた負数の平方根（虚数）は数学的に認知されなかったり，捨て去られていた。負の数の累乗根は17世紀の半ばから用いられ，以来虚数として知られた。デカルト（1596-1650）は虚数を高次方程式の考察において考慮し，それにより今日「代数学の基本定理」と呼ばれてている重要な事実を述べることができた。虚数の意味を体系的に明らかにしたのはオイラー（1707-1783）である。彼は虚数を実数と全く区別せずに

扱うことを通して数学の秘密の扉を開いた。指数関数と三角関数との間に成り立つ関係

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

特に　$e^{\pi i} = -1$

である。

複素数を平面上の点と対応させ，その間の四則を点の運動と関連させるというアイディアはウォリス（1616-1703）以前にまで遡ることができる。しかし，形式的な対応を越え，この幾何学的表象の真の意味を解明した最初の人はコーシー（1789-1857）である。

彼は実変数の関数を形式的に複素変数の関数に拡張し，これを利用して様々な実積分の計算法を編み出し，その後，この積分を，複素数平面上の線積分と捉えると理論が美しく単純化されるという事実（複素数平面上の真の意義）に到達した，もっとも，このアイディアの重要性を最初に捉えたのは，本当はガウス（1777-1855）であった。変数を実数に限らず，複素数に拡張し，複素数平面上への等角写像と見たのである。彼は虚数という言葉の持つおどろおどろしさを嫌い実部と虚部の二つの部分からできている数という意味で複素数という名前を与えたが同時代人の理解力を慮ってか，発表をためらった。ガウスの権威によって，複素数を表す複素数平面（ガウス平面）が一般的形式となった。さらに，リーマン（1826-1866）はグラフの考えを拡張して，複素数平面上に広げ，複素数値関数と見る立場を開いた。

5　「複素数と複素数平面」の指導とその意義

複素数は複素変数関数，つまり複素解析の理論の基礎である。高専での教育の中心の一つである「関数」は数学全般にわたる基本として非常に重要であり，その概念は実に多くの応用を示している。「関数」は三角，指数，対数と種類も多い。定義域や値域を実数の領域から複素数の領域まで拡張することによって飛躍的に「関数」の内容が豊富で変化に富んだものとなっている。

2次方程式が常に解を持つようにするためには，数の範囲を複素数にまで拡張しなければならない。その拡張によって，すべての代数方程式に解が存在することになる。そして，どのような性質が保存されるかを知って数の概念や方程式についての理解を深めることは大切である。一方，このような代数的側面に対して，複素数を導入することにより複素数を幾何的にとらえ，複素数に対する素朴な数感覚の上に，有用なもの，いろいろな性格を持ったものであることを知らせることも重要である。また，「複素数と複素数平面」を適切かつ能率的に活用する能力を伸ばすためにもその基本についての十分な理解を図っておくことが大切である。

① 数の範囲を拡張して負の数の平方根が求められることを知らせる。また，複素数を定義し，相等条件や四則を理解させる。

② 複素数平面上の点と複素数を1対1に対応させて，複素数の和や差を図表示することにより，直感的に理解させる，また，複素数を加えることは，図形的には平行移動になることを理解させる。加法・減法のもつ幾何学的意味を明らかにする。

③ 複素数を極形式で表し，複素数の積や商を図表示することを通して理解を深める。また絶対値が1の複素数をかけることは，図形的には回転移動になることを理解させる。乗法・除法のもつ幾何学的意味を明らかにする。

④ ド・モアブルの定理を導き，2項方程式の解法などを通して，その有用性を認識させる。

⑤ 複素数は2つの実数の組と同等に扱うことができることを，複素数の図形への応用を扱うことを通して体得させ，複素数のもつよさや有用性を理解させる。

(1)　教材の配列

① 「複素数と複素数平面」の展開の大局的な部分
負の数の平方根の定義として虚数単位 i を導入し，「2次方程式」の理論展開の場で「複素数」を取り扱った後，単元を改めて「複素数と複素数平面」を取り上げる方向，或いは「2次方程式」の展開では実数解を持つ「2次方程式」だけを取り扱い，単元を改めて「複素数と複素数平面」の理論展開の中で虚数解を持つ「2次方程式」を取り扱い，実数解と虚数解を切り離して取り扱う方向が考えられる。ここでは「2次方程式」の理論の連続性を重視して前者の方向で，「2次方程式」と「複素数と複素数平面」に分けて取り扱う。

② 「複素数」の展開の局所的な部分
「複素数」の理論や性質について取り上げて展開・追求した上で「複素数平面」に精通するということを前提にする。さらに，n次の2項方程式の解法や理論について展開していく方向の立場に立って，

ア　学生に「複素数」の導入時点で，2乗して負になる数の必要性から虚数単位を導入して数を

拡張した。そのような数は純虚数である。そのため「複素数」より先に純虚数を取り上げる。純虚数の四則を追求した上で「複素数」の四則を追求していく方向。

イ　2乗して負になる数の必要性から虚数単位を導入して数を拡張後，すぐに「複素数」を定義して相等条件，根幹である四則計算を追求した上で特殊な純虚数の四則について追求していく方向。

が考えられる。数学の学問として論を展開し，順次その数学的な感覚を磨いていく場合には，イの方向である。「複素数」の学生の分かり易さに着目すれば，アの純虚数，「複素数」の順序で展開していく方向。すなわち，単項式に相当する純虚数による計算の分かり易さとその計算力のアップ・習熟することを通して，多項式に相当する「複素数」の計算に結びつけて追求し，習熟する方向である。さらに，学生に確実に定着することを第一義に考えれば，アの方向で展開・追求することがふさわしいと考える。

「複素数」の展開としては，負の数の平方根の定義，虚数単位iを含む計算，複素数の加減乗の計算，共役な複素数，除の計算，複素数の相等の定義，その問題によって加減乗の計算の締め括りとする。

「複素数平面」の展開としては，まず，実数倍・和・差の図表示と平行移動，絶対値・2点間の距離，極形式，極形式の積・商の図表示と回転，ド・モアブルの定理，n乗根・2項方程式，次に，平面図形と複素数を取り上げて，直線の方程式，内分・外分・中点・重心，等式を満たす点の軌跡・垂直2等分線・円・軌跡，アポロニウスの円，最後に複素数と多角形を取り上げて，2直線のなす角・複素数と三角形・四角形の順に学習する方法をとる。

(2) 指導方法

「複素数と複素数平面」が学生の身につくような効率的な指導の確立を目標とした指導細案を作成し，これを実際の授業に活用する。それは例題とその解法の把握を通して，基本的な概念や解法の原理や法則の理解を深め，それらを的確かつ能率的に活用する能力を確実に学生自身のものとさせるために重要な役割を果たしている。学生は例題の学習の後，練習問題を独力で解く。次に，模範解答と比較をし，間違えた問題を添削する。この時点で，例題の学習にフィードバック，或いは，解けない問題の復習を繰り返し，集中して取り組むならば，どんな問題にも対応できるようになり，自主・自発的な学習態度ができていくものと確信する。併せて，「複素数と複素数平面」の実際の問題の解法が確実にマスターできて，より進んだ数学的な考え方や処理の仕方を生み出す能力や態度を養うことができるようになると考える。

(3) 教師のはたらき

学生が内容を十分に理解し，既習事項を活用する力を身につけるには，教師の用意周到で且つ綿密な準備の下に授業を展開しなければならない。その観点から概念の把握と教科書の問題を自分の力で解決できるような実力がつくように1コマ(2時間)毎の授業案を指導細案に基づいて作成して授業展開を実践する。

学生が素直に受け入れることができ，しかもそれによって厳密で豊富な知識が身につくとともに，理論に対する真の追求意欲が高まり，問題がスムーズに解けるように解説や解法を工夫する。

限られた授業時間内に消化できる例題をできるだけ多く載せて不足になりがちな問題演習を補う目的と，学生が「複素数と複素数平面」を楽しみながら，しかも，それを解くための方法も確実に身につくように配慮しているわけである。更に進んで積極的に自ら問題を作り，解く或いは，証明し，応用・発展させることができるようになっていくと考える。ところどころ別解を取り入れたのも，その考え方や方法の面で，学生の建設的な勉強に少しでも役立てたいと考えたからである。

(4) 指導の実際

講義は問題の解法については，独自の解説を利用し，要点を押さえた丁寧な展開を心がける。その後，解答レポート作成などを通して継続的に学習を促したり，教科書や問題集の演習問題を繰り返し解くことによる実力の積み上げを図る。

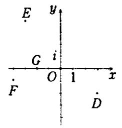
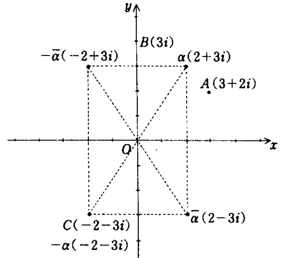
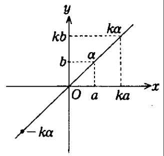
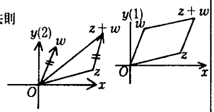
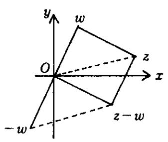
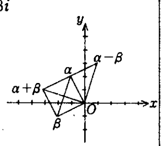
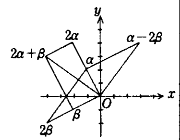
6　参考文献

(1) 改訂版新編数学B 渡辺信三・大島利雄 数研出版
(2) 新編 数学B 藤田宏 東京書籍
(3) 新編高校 数学B 改訂版 茂木勇 旺文社
(4) 数学B・改訂版数学B 永尾汎 数研出版
(5) 数学Bとその改訂版 藤田宏・前原昭二 東京書籍
(6) 数学B・数学B改訂版 小松勇作 旺文社
(7) 新編 高専の数学3 田代嘉宏・難波完爾 森北出版
(8) 高等学校学習指導要領解説 数学編 文部省

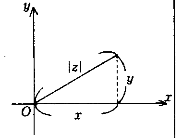
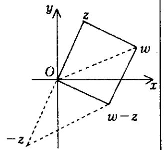
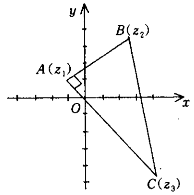
指導細案(No. 1)

問題，解法の手順	前提内容，関連事項	解法，技能，計算技術	誤り易い箇所	指導上の留意点
EX1 次の問いに答えよ。 (1) 次の計算をせよ。 ① $5\cdot 6i$ ② $4i\cdot(-3)i$ ③ $\dfrac{3i}{-7i}$ ④ $\dfrac{1}{i}$ (2) 次の式を i を用いて表せ。 ① $\sqrt{-5}$ ② $\sqrt{-49}$ (3) 方程式 $x^2+6=0$ を解け。 (4) 次の計算をせよ。 ① $\sqrt{-4}\ \sqrt{-9}$ ② $\dfrac{\sqrt{-8}}{\sqrt{2}}$ ③ $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}}$ 解 (1) 単項式の計算 $i^2=-1$ と置換 (2), (4) $\sqrt{-1}=i$ と置換 (3) $x^2=-a \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{a}\,i$	・方程式 $x^2=-3$ …①を解け。 実数は2乗すると正または0であるから，方程式①を満たす実数 x は存在しない。2乗すれば -1 となる新しい数を導入する。これまでの数とは異なるので特別な記号 i で表示する。すなわち $i^2=-1$，このとき①から $x=\pm\sqrt{-3}=\pm\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}=\pm\sqrt{3}\,i$〃 。一般に $a>0$ のとき $-a$ の平方根は $\sqrt{a}\,i$ と $-\sqrt{a}\,i$ である。 $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$, i を虚数単位という。i を含んだ数の計算は，i を文字とする式のように扱い，関係 $i^2=-1$ を用いて簡単にする。 特に $\sqrt{-1}=i$ 根号が負のときは，まずそれを i を用いた形に書き換えてから計算する。	解 (1) ① 与式 $=(5\cdot 6)i=30i$〃 ② 与式 $=4\cdot(-3)\cdot(i\cdot i)=-12i^2=-12\cdot(-1)=12$〃 ③ 与式 $=\dfrac{3}{-7}=-\dfrac{3}{7}$　④ 与式 $=\dfrac{i}{i\cdot i}=\dfrac{i}{i^2}=\dfrac{i}{-1}=-i$〃 (2) ① $\sqrt{-5}=\sqrt{5}\sqrt{-1}=\sqrt{5}\,i$〃 ② $\sqrt{-49}=\sqrt{49}\sqrt{-1}=\sqrt{7^2}\,i=7i$〃 (3) 6を移項して $x^2=-6$　$x=\pm\sqrt{-6}=\pm\sqrt{6}\sqrt{-1}=\pm\sqrt{6}\,i$〃 (4) ① 与式 $=\sqrt{4}\,i\cdot\sqrt{9}\,i=2i\cdot 3i=(2\cdot 3)\cdot(i\cdot i)=6i^2=6\cdot(-1)=-6$〃 ② 与式 $=\dfrac{\sqrt{8}\,i}{\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}\,i}{\sqrt{2}}=2i$〃 ③ 与式 $=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\,i}=\dfrac{2}{i}=\dfrac{2i}{i^2}=\dfrac{2i}{-1}=-2i$〃	・単項式の計算として(1)②では $-12i^2$ として済ましてしまう。 ・(1)④の $\dfrac{1}{i}$ の計算はとまどう。 ・(2)②では $49=7^2$ に気付かず，$\sqrt{49}\,i$ を答とする。 ・$x^2+6=0$ から $x^2=-6$ に変形できないため手がつけられない。 ・①$\sqrt{36}=\sqrt{6^2}=6$，②$\sqrt{\dfrac{-8}{2}}$，③$\sqrt{\dfrac{8}{-2}}$ と計算してミスをする。	・i を文字のように扱い，数毎，文字毎にそれぞれ計算し，数は文字の前に書く。i^2 が出ると -1 におきかえる。 $-12i^2=-12\cdot(-1)=12$ ・$i^2=-1$ を利用するために分母，分子に i を掛ける。共役な複素数を学んだ後は $-i$ を掛ける発想も出てくる。 ・$\sqrt{49}\,i=\sqrt{7^2}\,i=7i$ ・$x^2=6$ のとき解いたように $x^2=-6$ と変形し答 $x=\pm\sqrt{6}\,i$ を得る ・$a>0$, $b>0$ のとき $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$
EX2 次の問いに答えよ。 (1) 次の計算をせよ。 ① $(3+i)+(2-5i)$ ② $(-3+4i)-(5-7i)$ ③ $(2+3i)(3-2i)$ (2) $\alpha=3+4i$ と共役な複素数 $\overline{\alpha}$，それらの2数の和，積を求めよ。 (3) 次の計算をせよ。 ① $\dfrac{2+5i}{3-2i}$ ② $\dfrac{3+2i}{6-2i}+\dfrac{3-4i}{2+6i}$ 解 (1), (2)多項式の計算 $\alpha=a+bi$, $\overline{\alpha}=a-bi$ (3) 共役な複素数を分母，分子に掛けて分母の実数化を図る。	。複素数：a, b は実数，$\alpha=a+bi$ の形に表される数，a：実部，b：虚部 複素数 $a+bi\begin{cases}\text{実数 } b=0 \text{ のとき}\\ \text{虚数 } b\neq 0 \text{ のとき，純虚数 } a=0 \text{ かつ } b\neq 0\end{cases}$ 。共役な複素数，複素数 $\alpha=a+bi$ に対して $\overline{\alpha}=a-bi$ をいう。 和，積　$\alpha+\overline{\alpha}=2a$, $\alpha\overline{\alpha}=a^2+b^2$ 。複素数の加減乗除 〔1〕 $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$ 〔2〕 $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$ 〔3〕 $(a+bi)(c+di)=(ac+bdi^2)+(ab+bc)i=(ac-bd)+(ad+bc)i$ 〔4〕 $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\dfrac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$ $=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$ ($c=d=0$ を除く)	解 (1) ① 与式 $=(3+2)+(i-5i)=5+(1-5)i=5-4i$〃 ② 与式 $=(-3-5)+(4-7)i=-8+11i$〃 ③ 与式 $=2\cdot 3-3\cdot 2i^2+(-2\cdot 2+3\cdot 3)i=(6+6)+(-4+9)i=12+5i$〃 (2) $\overline{\alpha}=3-4i$, $\alpha+\overline{\alpha}=(3+4i)+(3-4i)=2\cdot 3=6$〃 $\alpha\overline{\alpha}=(3+4i)(3-4i)=3^2-(4i)^2=9-16i^2=9+16=25$〃 (3) ① 与式 $=\dfrac{(2+5i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\dfrac{(6-10)+(4+15)i}{9+4}=-\dfrac{4}{13}+\dfrac{19}{13}i$〃 ② 与式 $=\dfrac{(3+2i)(3+i)}{2(3-i)(3+i)}+\dfrac{(3-4i)(1-3i)}{2(1+3i)(1-3i)}$ $=\dfrac{(9-2)+(3+6)i}{2(9+1)}+\dfrac{(3-12)+(-9-4)i}{2(1+9)}$ $=\dfrac{7+9i}{2\cdot 10}+\dfrac{-9-13i}{2\cdot 10}=\dfrac{(7-9)+(9-13)i}{20}$ $=\dfrac{-2-4i}{20}=-\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{5}i$	・多項式の計算として(1)③では $6-5i-5i^2$ として済ましてしまう。$-6i^2$ が定数項であることに気づかない。 ・複素数と共役な複素数の和，積が実数となる意識が薄く，(3)の分母の実数化に直結できない。 ・(3)②では分母の実数化の際に，$6+2i$ や $6-2i$ を分母，分子に掛ける。もっと大きな数となるとミスをする確率が高くなることに気づかない。	・$(a+bi)(c+di)$ の $bdi^2=bd\times(-1)=-bd$ と ac は同類項となる。公式として $(ac-bdi^2)+(ad+bc)i$ として展開公式を用いると間違いが少ない。 $(6+6)-5i=12-5i$ ・分数の実数化には共役な複素数との積が実数になることに着目させ，分母，分子にそれを掛けて計算する。 ・$6-2i=2(3-i)$ $2+6i=2(1+3i)$ に着目して，$3+i$ や $1-3i$ を掛けて小さい数の計算に持ち込むことによりミスを防ぐ。
EX3 次の等式を満たす実数 x, y を求めよ。 (1) $(x-2y)+(2x+5y)i=7-4i$ (2) $(4-3i)x-(3-2i)y=6-5i$ (3) $(2x+yi)(3-2i)=-13i$ (4) $\dfrac{x+yi}{1+2i}=1-i$ (5) $\dfrac{3-2i}{x+2yi}=1+i$ 解 (1)～(4)複素数の相等条件 $a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c$ かつ $b=d$ を利用する。 (1) 相等条件をそのまま利用する。 (2), (3)展開し，i について整理して利用する。 (3)〔別〕式を見抜いて両辺を $3-2i$ で割った式から相等条件を利用する。 (4) 分母を実数化して相等条件を利用する。 〔別〕式を見抜いて、両辺に $1+2i$ を掛けてから相等条件を利用する。 (5) 式を見抜いて，両辺の逆数をとり，次に $3-2i$ を掛けてから相等条件を利用する。	。複素数の相等：a, b, c, d は実数 $a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c$ かつ $b=d$ 特に $a+bi=0 \Leftrightarrow a=0$ かつ $b=0$ 。$\alpha\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ または $\beta=0$ 〔証〕(⇐) $\alpha=0$ または $\beta=0 \Rightarrow \alpha\beta=0$ は明らかに成立つ (⇒) $\alpha\beta=0$ のとき，$\alpha\neq 0$ とすると $\alpha\beta=0$ の両辺を α で割ると $\beta=0$ を得る。 $\beta\neq 0$ でも，同様に $\alpha=0$ を得る。 したがって $\alpha\beta=0 \Rightarrow \alpha=0$ または $\beta=0$　(証明終わり) 。共役な複素数：α, β は複素数のとき次の等式が成り立つ (1) $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$　(2) $\overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}$ (3) $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}$　(4) $\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}=\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$ $\alpha=a+bi$ のとき (1) α が実数 $\Leftrightarrow \overline{\alpha}=\alpha$　α が純虚数 $\Leftrightarrow \overline{\alpha}=-\alpha$, $\alpha\neq 0$ 〔証〕(1) α が実数 $\Rightarrow b=0$ ∴ $\overline{\alpha}=\alpha$，逆に $\overline{\alpha}=\alpha \Rightarrow a-bi=a+bi$ ∴ $2bi=0$ ∴ $b=0$ すなわち α は実数 (2) α が純虚数 $\Rightarrow a=0$ ∴ $\overline{\alpha}=-\alpha$　逆に $\overline{\alpha}=-\alpha \Rightarrow a-bi=-a-bi$ ∴ $2a=0$ ∴ $a=0$ すなわち α は純虚数 (∵ $\overline{\alpha}\neq 0$ より $b\neq 0$)	解 (1) x, y は実数より $x-2y$, $2x+5y$ は実数であるから複素数の相等より $x-2y=7$ …①　$2x+5y=-4$ …② ①×2−② より　$-9y=18$ ∴ $y=-2$〃 ①より $x=3$〃 (2) 左辺を i について整理すると $(4x-3y)+(-3x+2y)i=6-5i$ $4x-3y$, $-3x+2y$ は実数であるから $4x-3y=6$ …①　$-3x+2y=-5$ …② ①×2+②×3より　$-x=-3$ ∴ $x=3$〃　①より $y=2$〃 (3) $(6x+2y)+(-4x+3y)i=-13i$ $6x+2y$, $-4x+3y$ は実数であるから $6x+2y=0$ …①　$-4x+3y=-13$ …② ①×3−②×2 より　$26x=26$ ∴ $x=1$〃　①より $y=-3$〃 〔別〕$2x+yi=\dfrac{-13i}{3-2i}$ ここで $\dfrac{-13i}{3-2i}=\dfrac{-13i(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\dfrac{26-39i}{13}=2-3i$ ∴ $2x+yi=2-3i$ $2x$, y は実数であるから　$2x=2$, $y=-3$ ∴ $x=1$, $y=-3$〃 (4) 左辺の分母を実数化して $\dfrac{(x+2y)+(-2x+y)i}{5}=1-i$ ∴ $x+2y+(-2x+y)i=5-5i$ $x+2y$, $-2x+y$ は実数であるから　$x+2y=5$ …① $-2x+y=-5$ …② ①×2+②　$5y=5$ ∴ $y=1$〃　①より $x=3$〃	・(2)は i について整理しないで $4-3i=6$, $3-2i=5$ と書く ・(3)以降は複素数の相等条件が利用できる等式変形に持ち込めず手がつかない。 ・(3)は展開して，(4), (5)は分母を実数化して後，式を i で整理しないで求めようとするからミスをする。	・複素数の相等条件 $a+bi=c+di$ a, b, c, d は実数であること $a=c$ かつ $b=d$ が成り立つことを確認する。 ・(2)以降は，展開，分母の実数化の後，i で整理をして複素数の相等条件を使用する。 ・文字を含む複素数＝数だけの複素数に変形してから相等条件を利用すると迅速かつ正確にできる。
			(4)〔別〕$x+yi=(1-i)(1+2i)$　ここで $(1-i)(1+2i)=3+i$ ∴ $x+yi=3+i$ x, y は実数であるから　$x=3$　$y=1$〃 (5) $\dfrac{x+2yi}{3-2i}=\dfrac{1}{1+i}$ ∴ $x+2yi=\dfrac{3-2i}{1+i}$　ここで $\dfrac{3-2i}{1+i}=\dfrac{(3-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{1-5i}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}i$ ∴ $x+2yi=\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}i$ x, $2y$ は実数であるから $x=\dfrac{1}{2}$, $2y=-\dfrac{5}{2}$ ∴ $x=\dfrac{1}{2}$, $y=-\dfrac{5}{4}$〃	

指導細案(No.2)

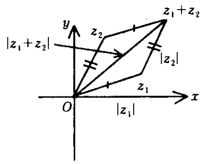
問題，解法の手順	前提内容，関連事項	解法，技能，計算技術	誤り易い箇所	指導上の留意点
EX1 次の問いに答えよ。 (1)下の複素平面上で，次の点を図示せよ。 $A(3+2i)$, $B(3i)$, $C(-2-3i)$ (2)下の図で，点D, E, F, Gおよび原点Oはどのような複素数を表すか。  (3)複素数$\alpha=2+3i$を表す点と実軸，虚軸，原点について対称な点が表す複素数を求めよ。 またそれらをαや$\overline{\alpha}$を用いて表せ。 $\boxed{解}$ $z=x+yi \leftrightarrow$ 点(x,y) 実軸をx軸，虚軸をy軸と見て対称移動	◦複素数平面 複素数を表すのに$\alpha, \beta, \cdots$以外にz, wなどの文字も使用する。 実数は数直線で表された。複素数$z=x+yi$を表すには実部x，虚部yの2つの実数が必要 座標平面上に複素数$z=x+yi$に点(x, y)を対応させる。複素数と座標平面上の点は，1つずつ，もれなく対応する。 各点が，複素数$z=x+yi$を表しているような平面を複素数平面またはガウス平面という。 複素数平面上で複素数zを表す点Pを単に点zとよび，$P(z)$と書く。x軸上の点$(x, 0)$は実数$x=x+0i$，y軸上の点$(0, y)$は純虚数$yi=0+yi$に対応する。したがってx軸を実軸，y軸を虚軸という。 ◦複素数と共役な複素数の関係　$z=x+yi$, $\overline{z}=x-yi$ (1)点(x, y)と点$(x, -y)$はx軸に関して対称　よってzと$\overline{z}$は実軸に関して対称 (2)点(x, y)と点$(-x, -y)$は原点に関して対称　よってzと$-z$は原点に関して対称 (3)点(x, y)と点$(-x, y)$はy軸に関して対称　よってzと$-\overline{z}$は虚軸に関して対称 以上のことよりzが実数$\Leftrightarrow \overline{z}=z$　zが純虚数$\Leftrightarrow \overline{z}=-z$　$(z \neq 0)$ ◦共役な複素数の性質 (1) $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$　(2) $\overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}$　(3) $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}$　(4) $\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}=\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$ $\beta \neq 0$のとき	$\boxed{解}$(1) • $3+2i \to$ 点$(3, 2)$ • $3i \to$ 点$(0, 3)$ • $-2-3i \to$ 点$(-2, -3)$ (2) • $D(3, -2) \to 3-2i$ • $E(-3, 4) \to -3+4i$ • $F(-4, -1) \to -4-i$ • $G(-2, 0) \to -2$ • $O(0, 0) \to 0$ (3) • 実軸対称　$2-3i$　$\therefore \overline{\alpha}=2-3i$ • 虚軸対称　$-2+3i$　$\therefore -\overline{\alpha}=-(2-3i)$ • 原点対称　$-2-3i$　$-\alpha=-(2+3i)$  	• $z=x+yi \to$点(x, y)で点の位置を説明するが，$B(2i)$に対応する点にとまどう。 • 点$(x, y) \to z=x+yi$で点を複素数で表すが，点GやOはとまどう。 • 実軸はx軸，虚軸はy軸と読みかえて対称移動する。 次に点の位置を読み取り，複素数表示する。 αと$\overline{\alpha}$の関係がうまく見い出すことができない。	• 特殊な点$B(3i)$について$B(0+3i)$と書き換える。x座標が実部O，y座標が虚部3の点$(0, 3)$が対応することを押さえる。 • 点G, Oについて 点G, x座標が実部-2 y座標が虚部Oの点$G(-2, 0)$を読み取る。 • $G(-2,0) \to G(-2+0i)$ $\therefore G(-2)$ 点O: x座標，y座標すなわち実部，虚部がともに0の点$O(0, 0)$を読み取る。 $O(0,0) \to O(0+0i)$ $\therefore O(0)$ • 実軸→x軸，虚軸→y軸である。対称移動して点の位置を読み取り，複素数で表す。 • 例えば$-2+3i=-(2-3i)$と変形して$\overline{\alpha}$と関係づける。
EX5 (1) $\alpha=2+i$, $\beta=b-2i$, $\gamma=6+ci$とする。4点O, α, β γが一直線上にあるとき，実数b, cの値を求めよ。 (2) 点$\alpha+\beta$, $\alpha+\gamma$を求めよ。 $\boxed{解}$(1)3点O, α, βが一直線上にある$\Leftrightarrow \beta=k\alpha$ 3点O, α, γが一直線上にある$\Leftrightarrow \gamma=h\alpha$ (2) $\alpha+\beta=\alpha+k\alpha=(1+k)\alpha$ $\alpha+\gamma=\alpha+h\alpha=(1+h)\alpha$ 点α, β, γを点$\alpha+\beta$, $\alpha+\gamma$も一直線上にある	◦一直線上にある条件 k：実数　$\alpha=a+bi(\neq 0)$ $k\alpha=ka+(kb)i$ したがって，3点O, α, $k\alpha$は一直線上にある。 逆に，2点O, αを通る直線上の任意の点は $k\alpha$の形の複素数 よって$\alpha \neq 0$のとき 3点O, α, βが一直線上にある。$\Leftrightarrow \beta=k\alpha$　ただし，kは実数 $\beta=k\alpha$について 〔1〕$k>0$のとき　2点O, αを通る直線上で点βは点Oに関して点αと同じ側 〔2〕$k<0$のとき　2点O, αを通る直線上で点βは点Oに関して点αと反対側  	$\boxed{解}$ (1) $\beta=k\alpha$(k:実数)とすると $b-2i=k(2+i)$　$\therefore$ $b-2i=2k+ki$ b, kは実数であるから両辺の実部，虚部ともに実数である。 $\therefore$ $b=2k \cdots$①　$-2=k \cdots$②　②を①に代入して　$b=-4$〃 $\gamma=h\alpha$(h:実数)とすると $6+ci=h(2+i)$　$\therefore$ $6+ci=2h+hi$ c, hは実数であるから両辺の実部，虚部ともに実数である。 $\therefore$ $6=2h \cdots$①　$c=h \cdots$② ①より　$h=3 \cdots$③　③を②に代入して　$c=3$〃 (2)　(1)より　$\beta=-2\alpha$, $\gamma=3\alpha$であるから $\therefore$ $\alpha+\beta=\alpha-2\alpha=-\alpha$〃　$\alpha+\gamma=\alpha+3\alpha=4\alpha$〃	• 4点が一直線上にある条件はないために求められない。3点が一直線上にある問題に帰着できない • 等式を立式したが文字の種類が多く相等条件をうまく使えないために求められない。	• 固定点は原点Oと点αに着目する。4点を1度に考えないで，3点にしぼって考える。 (1)3点O, α, βが一直線上にある (2)3点O, α, γが一直線上にある • 3点O, α, βが一直線上にある条件 $\beta=k\alpha$　($\alpha \neq 0$, kは実数) • 3点O, α, γが一直線上にある条件 $\gamma=h\alpha$　($\alpha \neq 0$, hは実数) 文字をkと異なるhをとることに注意 • 相等条件　a, b, c, dが実数のとき $a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c$, $b=d$
EX6 (1) $z=-2+i$は$w=3-2i$だけの平行移動でどんな点に移るか (2)2点$\alpha=-1+2i$, $\beta=-2-i$について点$\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, $2\alpha+\beta$, $\alpha-2\beta$を複素数平面上に平行四辺形をつくって図示せよ。 $\boxed{解}$ (1)$w=u+vi$だけの平行移動：実軸方向にuだけ，虚軸方向にvだけ平行移動：計算では$z+w$ (2)平行四辺形法則 $\alpha+\beta$: 線分$O(\alpha+\beta)$が対角線 $\alpha-\beta$: 線分$O\alpha$が対角線 $2\alpha+\beta$: 線分$O(2\alpha+\beta)$が対角線 $\alpha-2\beta$: 線分$O\alpha$が対角線	◦複素数$w=u+vi$だけの平行移動 • $z=x+yi$に$w=u+vi$を加えるとその和は $z+w=(x+u)+(y+v)i$　zの実部がuだけ，虚部がvだけ増える。これは実軸方向にuだけ，虚軸方向にvだけ平行移動したものである。このことは点zを$w=u+vi$だけの平行移動という。 複素数wを加えることは図形的に考えると平行移動になる。 複素数wだけの平行移動は，点zを点$z+w$に，原点Oを点wに移す。 複素数平面上の4点O, z, $z+w$, wは平行四辺形をつくる。 • 差$z-w$について$z=w+(z-w)$より$z-w$だけの平行移動は点wを点zに，原点Oを点$z-w$に移す。 4点O, $z-w$, z, wは平行四辺形をつくる。 また，$-w$を表す点は点wと原点に関して対称であることに着目して$z-w=z+(-w)$ 4点O, $-w$, $z-w$, zは平行四辺形をつくる。点$z-w$，は2線分Oz, $O(-w)$を2辺とする平行四辺形の第4の原点 (1)平行四辺形法則 (2)三角形法則  	$\boxed{解}$(1) $w=3-2i$だけの平行移動は実軸方向に3，虚軸方向に-2だけの平行移動 点zを点$z+w=(-2+3)+(1-2)i=1-i$に移す。 (2) •αをβだけの平行移動　$\alpha+\beta=-1+2i+(-2-i)=-3+i$ $\therefore O$, α, $\alpha+\beta$, βは平行四辺形をつくる。 •αを$-\beta$だけの平行移動　$\alpha-\beta=-1+2i-(-2-i)=1+3i$ $\therefore O$, $\alpha-\beta$, α, βは平行四辺形をつくる。 •2αをβだけの平行移動 $2\alpha+\beta=2(-1+2i)+(-2-i)$ $=-2+4i+(-2-i)$ $=-4+3i$ $\therefore O$, 2α, $2\alpha+\beta$, βは平行四辺形をつくる。 • αを-2βだけの平行移動 $\alpha-2\beta=-1+2i-2(-2-i)$ $=-1+2i+(4+2i)$ $=3+4i$ $\therefore O$, $\alpha-2\beta$, α, 2βは平行四辺形をつくる。  	• $W=3-2i$だけの平行移動は和で与えられる。 • 計算して図示できる。図形的には (1)$\alpha+\beta$, $2\alpha+\beta$のような和の場合 線分$O(\alpha+\beta)$，$(O(2\alpha+\beta))$は2線分$O\alpha(O(2\alpha))$, $O\beta$を2辺とする平行四辺形の第4の頂点として簡単に作図できる。 (2)$\alpha-\beta$, $\alpha-2\beta$のような差の場合不慣れでうまく作図できない。	• 和は平行移動，逆に平行移動は和で与えられる。 • 計算して図示することはそんなに難しいことはないが，図形的には (1)和のときは，原点と和を表す点を結ぶ線分が対角線 (2)差のときは，原点と点αを結ぶ線分が対角線 線分$O\beta(O(2\beta))$を1辺とし，線分$O\alpha$を対角線とする平行四辺形の第4の頂点

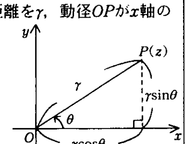
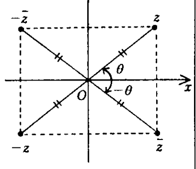
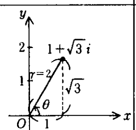
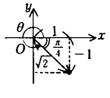
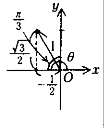
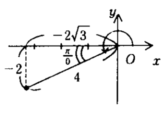
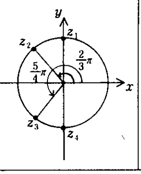
指導細案(No. 3)

<table>
<tr><th>問題，解法の手順</th><th>前提内容，関連事項</th><th>解法，技能，計算技術</th><th>誤り易い箇所</th><th>指導上の留意点</th></tr>
<tr>
<td>EX7 次の問いに答えよ。
(1) 複素数 $z=4-3i$, $w=-5i$ について
①絶対値 $|z|$, $|w|$ を求めよ。
②点 z と点 w の2点間の距離を求めよ。
(2) 3点 $z_1=-1+i$, $z_2=2+3i$, $z_3=3-5i$ を頂点とする三角形はどのような三角形か
解 (1) 絶対値，2点間の距離の定義
(2) $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$ とする。3辺の長さに着目，次にその3辺の間に成り立つ関係式を図示して見当つけながら計算で見出す。</td>
<td>◦絶対値…点 z と原点 O との距離を複素数 z の絶対値という。$|z|$ で表す。
$z=x+yi$ のとき $|z|=|x+yi|=\sqrt{x^2+y^2}$
$\bar{z}=x-yi$ であるから
$z\bar{z}=(x+yi)(x-yi)=x^2+y^2=|z|^2$ $\therefore |z|=\sqrt{z\bar{z}}$
$y=0$ のとき $z=x$ $|z|=\sqrt{x^2}=|x|$
複素数 z の絶対値は実数 x の絶対値と一致

◦複素数の絶対値の性質
(1) $|z|\geqq 0$ 特に $|z|=0 \Leftrightarrow z=0$ (2) $|z|=|-z|=|\bar{z}|$ (3) $|z|^2=z\bar{z}$
◦2点間の距離 $w=z+(w-z)$ 4点 O, $w-z$
w, z は平行四辺形をつくる。
点 z と点 w の距離は原点 O と $w-z$ との距離に等しい。2点 z, w 間の距離は $|w-z|$
</td>
<td>解 (1) $z=4-3i \to (4,-3)$, $w=0-5i \to (0,-5)$
① $|z|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=\sqrt{5^2}=5$ $|w|=\sqrt{(-5)^2}=\sqrt{5^2}=5$
② $w-z=-5i-(4-3i)=-4-2i$
$|w-z|=|-4-2i|=\sqrt{(-4)^2+(-2)^2}=\sqrt{20}=\sqrt{2^2\cdot 5}=2\sqrt{5}$
(2) $AB=|z_2-z_1|=|3+2i|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$
$BC=|z_3-z_2|=|1-8i|=\sqrt{1^2+(-8)^2}=\sqrt{65}$
$CA=|z_1-z_3|=|-4+6i|=\sqrt{(-4)^2+6^2}=\sqrt{52}$
$\therefore AB^2+CA^2=BC^2$
したがって，$\triangle ABC$ は $\angle BAC=\frac{\pi}{2}$ の直角三角形。
</td>
<td>• $|z|$ は問題なく求められるが $|w|$ はとまどう。

• 2点 z, w 間の距離の定義 $|z-w|$ を直接用いるとミスをし易い。

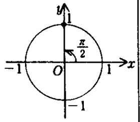
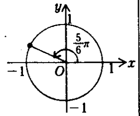
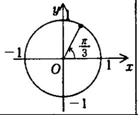
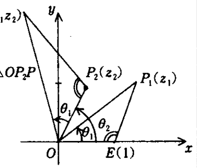
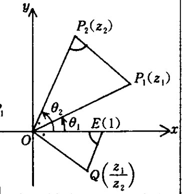
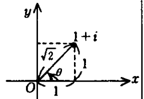
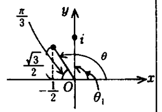
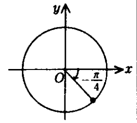
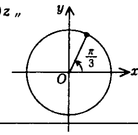
• 3辺の長さについては求められるが，それらの長さの関係式を発見するのは難しい。</td>
<td>• $w=-5i=0+(-5)i \to (0,-5)$ と表示することにより $|w|$ の定義がスムーズに適応できる。
• $|w-z|$ を計算する前に $w-z$ を求めて次に $|w-z|$ の計算に移ると計算ミスを少なくできる。

• 3点を図示して図形的に考察する。垂直関係に着目する。また，後で学習するが2直線 AB, AC のなす角は $\angle BAC=\arg\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}$ で与えられることに着目する。</td>
</tr>
<tr>
<td>EX8 $|z|=|z-2i|$ のとき，次の等式が成り立つことを示せ。
$z-\bar{z}=2i$
〔証〕 複素数の絶対値の性質
$|z|^2=z\bar{z}$
$|z-2i|^2=(z-2i)(\bar{z}+2i)$
を利用するために条件を平方，次にこれを展開し，i について整理，$z-\bar{z}$ について解く。</td>
<td>◦共役な複素数の性質 $\overline{\alpha\pm\beta}=\bar{\alpha}\pm\bar{\beta}$(複号同順), $\overline{\alpha\beta}=\bar{\alpha}\bar{\beta}$, $\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}=\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$
◦複素数の絶対値の性質 $|z|=0 \Leftrightarrow z=0$, $|z|=|-z|=|\bar{z}|$, $|z|^2=z\bar{z}$
$|z_1+z_2|\leqq|z_1|+|z_2|$ $(z_1\neq 0,\ z_2\neq 0)$
〔証〕〔1〕 3点 O, z_1, z_2 が一直線上にないとき
$|z_1|$, $|z_2|$, $|z_1+z_2|$ は三角形の3辺の長さとなるから
$|z_1+z_2|<|z_1|+|z_2|$
〔2〕 3点 O, z_1, z_2 が一直線上にあるとき
$z_2=kz_1$ を満たす実数 k が存在する。このとき
$|z_1+z_2|=|1+k||z_1|$,
$|z_1|+|z_2|=(1+|k|)|z_1|$
$|1+k|\leqq 1+|k|$ より $|z_1+z_2|\leqq|z_1|+|z_2|$
等号は $|1+k|=1+|k|$ $|1+k|^2=(1+|k|)^2$
$\therefore |k|=k$ $\therefore k\geqq 0$ よって $z_2=kz_1\ (k\geqq 0)$
</td>
<td>解 $|z|=|z-2i|$
両方を平方して $|z|^2=|z-2i|^2$
$\therefore z\bar{z}=(z-2i)\overline{(z-2i)}$ …①
ここで $(z-2i)\overline{(z-2i)}=(z-2i)(\bar{z}-\overline{2i})$
$=(z-2i)(\bar{z}+2i)$
$=z\bar{z}+2i(z-\bar{z})+4$ …②
②を①に代入 $z\bar{z}=z\bar{z}+2i(z-\bar{z})+4$
$2i(z-\bar{z})=-4$ $\therefore z-\bar{z}=\frac{-2}{i}=\frac{-2i}{i^2}=2i$(終)</td>
<td>• 複素数の絶対値の性質 $|z|^2=z\bar{z}$ を利用することを思いつかない。

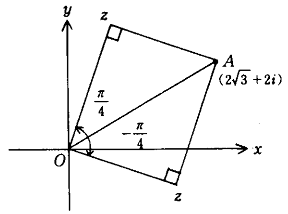
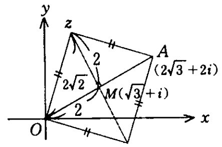
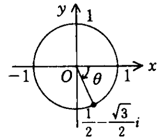
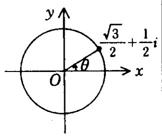
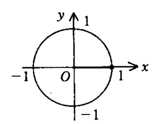
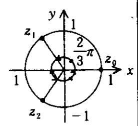
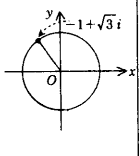
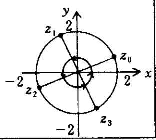
• 平方したとき
$|z-2i|^2$
$=(z-2i)\overline{(z-2i)}$
$=(z-2i)(\bar{z}-2i)$
と誤って計算する。</td>
<td>• 絶対値 $|z|$ と $\bar{z}$ を関連づける等式は $|z|^2=z\bar{z}$ しかないことに着目する。まず $|z|=|z-2i|$ の両辺を平方することが第一歩である。
• 共役な複素数の性質
$\overline{z-2i}=\bar{z}-\overline{2i}$
$=\bar{z}+2i$
$2i$ の符号は－(マイナス)ではなく＋(プラス)</td>
</tr>
<tr>
<td>EX9 (1)次の複素数を極形式で示せ。
① $1+\sqrt{3}i$
② $1-i$
③ $z=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$
④ $w=-2(\sqrt{3}+i)$
(2)次の絶対値 γ と偏角 θ をもつ複素数 z を求めよ。
① $\gamma=1$, $\theta=\frac{\pi}{2}$
② $\gamma=2$, $\theta=\frac{2}{3}\pi$
③ $\gamma=\sqrt{2}$, $\theta=\frac{5}{4}\pi$
④ $\gamma=3$, $\theta=\frac{3}{2}\pi$
解 (1) 絶対値 γ と偏角 $\theta(0\leqq\theta<2\pi)$ で極形式がきまる。
$|z|=\gamma=\sqrt{x^2+y^2}$
$\cos\theta=\frac{x}{\gamma}$, $\sin\theta=\frac{y}{\gamma}$
(2) $z=x+yi$
$x=\gamma\cos\theta$, $y=\gamma\sin\theta$
から z を求める。</td>
<td>◦極形式
$z=x+yi$ $(\neq 0)$ を表す点を P とする。P と原点との距離を γ，動径 OP が x 軸の正の部分となす角を θ とすると
$x=\gamma\cos\theta$, $y=\gamma\sin\theta$
$\therefore z=\gamma(\cos\theta+i\sin\theta)$ … z の極形式
$\gamma=\sqrt{x^2+y^2}=|z|$ (ただし，$\gamma>0$)

◦偏角 θ: z の偏角，記号 $\theta=\arg z$ $(0\leqq\theta<2\pi$, または，$-\pi<\theta\leqq\pi)$
一般角で考えるとき $\arg z=\theta+2n\pi$ $(n=0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots)$
$z=0$ に対しては $\gamma=0$，偏角は定義されない。
◦偏角が等しい
$\arg z=\arg w$:「2π の整数倍の差を無視したとき z と w の偏角が等しい」という意味に用いる。
◦共役な複素数の極形式
$z=\gamma(\cos\theta+i\sin\theta)$ のとき
$\arg\bar{z}=-\theta$, $\arg(-z)=\theta+\pi$, $\arg(-\bar{z})=-\theta+\pi$
$|\bar{z}|=|-z|=|-\bar{z}|=\gamma$
$\therefore \bar{z}=\gamma\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$,
$-z=\gamma\{\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi)\}$
$-\bar{z}=\gamma\{\cos(-\theta+\pi)+i\sin(-\theta+\pi)\}$
</td>
<td>解 (1) 絶対値を γ，偏角を $\theta(0\leqq\theta<2\pi)$ とする。
① $1+\sqrt{3}i \to (1, \sqrt{3})$ $\gamma=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$
$\cos\theta=\frac{1}{2}$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\therefore \theta=\frac{\pi}{3}$ $\therefore \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ …①
$1+\sqrt{3}i=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ (∵①)

② $\gamma=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ $\cos\theta=1$, $\sin\theta=-1$ $\therefore \theta=2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7}{4}\pi$
$1-i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$

③ $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ $|z|=\gamma=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$
$\cos\theta=-\frac{1}{2}$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\therefore \theta=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$
$z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$

④ $w=-2\sqrt{3}-2i$ $\gamma=\sqrt{(-2\sqrt{3})^2+(-2)^2}=\sqrt{16}=4$
$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta=-\frac{1}{2}$ $\therefore \theta=\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7}{6}\pi$
$\therefore w=4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=4\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi\right)$

(2) $z=x+yi$, $x=\gamma\cos\theta$, $y=\gamma\sin\theta$ $\therefore z=\gamma(\cos\theta+i\sin\theta)$
① $z_1=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=0+1i=i$
② $z_2=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)=2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-1+\sqrt{3}i$
③ $z_3=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=-1-i$
④ $z_4=3\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)=3(0-i)=-3i$
</td>
<td>• $z=x+yi$ で x, y の少なくとも一方が負のとき γ や θ を求めるのが不確実である。
②，③，④で θ を直接求めることは困難であることは三角関数で学習済で経験していることである。

• (1)①の変形のとき いきなり $\gamma=2$, $\theta=\frac{\pi}{3}$ を得て
$1+\sqrt{3i}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$
とすると $\gamma=2$ を落としてしまうことが見受けられる。
• (2)ここでも $z=\gamma(\cos\theta+i\sin\theta)$ に γ, θ の値を代入することで問題はないが γ の値を代入することを忘れる。</td>
<td>• $x+yi \to$ 点 (x, y) の対応を明確にして $\gamma=\sqrt{x^2+y^2}$ を求めたり，複素数平面上に図示をして $\cos\theta=\frac{x}{\gamma}$ $\sin\theta=\frac{y}{\gamma}$ から $\theta(0\leqq\theta<2\pi)$ を確実に求める。
• ②では $\frac{\pi}{4}$，③では $\frac{\pi}{3}$，④では $\frac{\pi}{6}$ を予め求めておき，次に $2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7}{4}\pi$, $\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$, $\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7}{6}\pi$ のようにして θ を求めるとミスが出ないことは既習である。再確認させる。
• ①の変形でみると
$1+\sqrt{3}i=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ として
$\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3}$ を代入して，$2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ とすると確実性が一層増加する。
• $z=x+yi$ …①において $x=\gamma\cos\theta$, $y=\gamma\sin\theta$ として x, y の値をきめてから①に代入して z を求めると γ の値を忘れることはない。</td>
</tr>
</table>

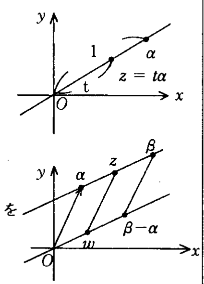
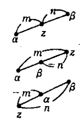
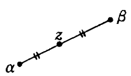
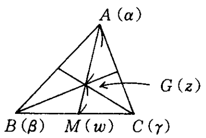
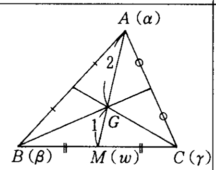
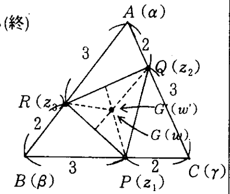
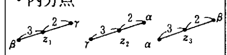
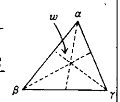
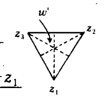
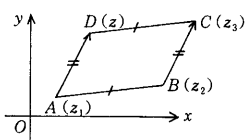
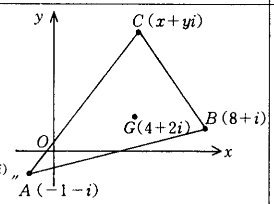
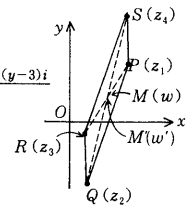
指導細案(No.4)

問題，解法の手順	前提内容，関連事項	解法，技能，計算技術	誤り易い箇所	指導上の留意点
EX10 (1) $z=\gamma(\cos\theta+i\sin\theta)$のとき，次の複素数の絶対値と偏角を求めよ。 ① z^2　② $\frac{z}{i}$ (2) $z_1=2\sqrt{2}(\cos\frac{7}{12}\pi+i\sin\frac{7}{12}\pi)$， $z_2=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$のとき， ①積$z_1z_2$　②商$\frac{z_1}{z_2}$を求めよ。 解 (1) $\|z\|=\gamma$, $\arg z=\theta$のとき ① $z^2=zz$と見て$\|z^2\|$, $\arg z^2$，を求める。 ② iについて$\|i\|=1$, $\arg i=\frac{\pi}{2}$，次に $\left\|\frac{z}{i}\right\|$, $\arg\left(\frac{z}{i}\right)$を求める。 (2) $\|z_1\|=2\sqrt{2}$　$\arg z_1=\frac{7}{12}\pi$ $\|z_2\|=\sqrt{2}$　$\arg z_2=\frac{\pi}{4}$ ① $\|z_1z_2\|$, $\arg(z_1z_2)$を求める。 ② $\left\|\frac{z_1}{z_2}\right\|$, $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$を求める。	◦複素数の積と商　$z_1(\neq 0)$, $z_2(\neq 0)$ $z_1=\gamma_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$, $z_2=\gamma_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ $z_1z_2=\gamma_1\gamma_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ $=\gamma_1\gamma_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)\}$ $=\gamma_1\gamma_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$ $\|z_1z_2\|=\gamma_1\gamma_2=\|z_1\|\|z_2\|$　$\arg(z_1z_2)=\theta_1+\theta_2=\arg z_1+\arg z_2$ 積の絶対値＝絶対値の積，積の偏角＝偏角の和 $\frac{1}{z_2}=\frac{\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}=\frac{\bar{z}_2}{\|z\|^2}=\frac{\gamma_2\{\cos(-\theta_2)+i\sin(-\theta_2)\}}{\gamma_2^2}=\frac{1}{\gamma_2}\{\cos(-\theta_2)+i\sin(-\theta_2)\}$ $\therefore\ \frac{z_1}{z_2}=z_1\cdot\frac{1}{z_2}=\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$ $\left\|\frac{z_1}{z_2}\right\|=\frac{\gamma_1}{\gamma_2}=\frac{\|z_1\|}{\|z_2\|}$　$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\theta_1-\theta_2=\arg z_1-\arg z_2$ 商の絶対値＝絶対値の商，商の偏角＝偏角の差	解 (1) ① $\|z^2\|=\|zz\|=\|z\|\|z\|=\|z\|^2=\gamma^2$〃，$\arg z^2=\arg zz=\arg z+\arg z=2\arg z=2\theta$〃 ② $\|z\|=\gamma$, $\arg z=\theta$　$\|i\|=1$, $\arg i=\frac{\pi}{2}$ $\left\|\frac{z}{i}\right\|=\frac{\|z\|}{\|i\|}=\|z\|=\gamma$〃，$\arg\left(\frac{z}{i}\right)=\arg z-\arg i=\theta-\frac{\pi}{2}$〃  (2) $\|z_1z_2\|=\|z_1\|\|z_2\|=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=4$, $\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2=\frac{7}{12}\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{6}\pi$　$\therefore z_1z_2=4(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi)$ $=4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=-2\sqrt{3}+2i$  ② $\left\|\frac{z_1}{z_2}\right\|=\frac{\|z_1\|}{\|z_2\|}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2$, $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg z_1-\arg z_2=\frac{7}{12}\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}$　$\therefore\ \frac{z_1}{z_2}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=1+\sqrt{3}i$ 	• $z^2=zz$に気付かないために積の絶対値，偏角の公式が使えない • iを極形式に表示すれば商$\frac{z}{i}$の絶対値，偏角が求められる。 • 積z_1z_2の絶対値，偏角の求め方を参照 • 商$\frac{z_1}{z_2}$の絶対値，偏角の求め方を参照	• 2乗の定義　$z^2=zz$にもどってz^2の絶対値や偏角を求める。 後で学習するが $z^2=\gamma^2(\cos\theta+i\sin\theta)^2$ $=\gamma^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)$ （ド・モアブルの定理)が成り立つことに着目する。 • 積の絶対値＝絶対値の積 積の偏角＝偏角の和 を用いて極形式，複素数を求める。 • 商の絶対値＝絶対値の商 商の偏角＝偏角の差 を用いて極形式，複素数を求める。
EX11 (1)点zと点$(1+i)z$はどんな位置関係にあるか (2)点zに対して，次の点はどのように移動した点であるか ① iz　② $w=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$のときwz (3)次の点を表す複素数を求めよ。 ①点zを原点のまわりに$-\frac{\pi}{4}$回転し，それを$2\sqrt{2}$倍に拡大(延ば)した点 ②点zを原点のまわりに$\frac{\pi}{3}$回転した点 解 $\gamma(\cos\theta+i\sin\theta)$を$z$に掛けることは，$z$を原点のまわりに$\theta$の回転し，それを$\gamma$倍に拡大又は縮小 (1) $1+i$, (2) ①i, ②wを極形式で表す。 (2) zを原点のまわりにθの回転し，それをγ倍に拡大または，縮小することは$\gamma(\cos\theta+i\sin\theta)$を$z$に掛ける。	◦複素数の積の図表示(積と回転) z_1, z_2の表す点をそれぞれP_1, P_2とする。積z_1z_2の表す点をPとする。 $\|z_1\|=\gamma_1$, $\arg z_1=\theta_1$ $\|z_2\|=\gamma_2$, $\arg z_2=\theta_2$ $\therefore\ \|z_1z_2\|=\gamma_1\gamma_2$ $\arg(z_1z_2)=\theta_1+\theta_2$ $\triangle OEP_1\backsim\triangle OP_2P$  したがって，点Pは，点P_1を原点を中心としてθ_2だけ回転し，さらに原点からの距離γ_1をγ_2倍に拡大または縮小した点である。逆にz_1を原点を中心としてθ_2だけ回転し，それをγ_2倍に拡大又は縮小した点の表す複素数は$\gamma_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$を$z_1$に掛けることである。特に，絶対値が1である複素数$w$について$w=\cos\theta+i\sin\theta$とするとき$wz$の表す点は，点$z$を原点を中心として$\theta$だけ回転した点である。逆に点$z$を原点を中心として$\theta$だけ回転した点の表す複素数は$\cos\theta+i\sin\theta$を$z$に掛けることである。 ◦複素数の商の図表示(商と回転) 商$\frac{z_1}{z_2}$の表す点をQとする。 $\therefore\left\|\frac{z_1}{z_2}\right\|=\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ $\arg\frac{z_1}{z_2}=\theta_1-\theta_2$ $\triangle OEQ\backsim\triangle OP_2P_1$  したがって，点θは，点P_1を原点を中心として$-\theta_2$だけ回転し，さらに原点からの距離γ_1を$\frac{1}{\gamma_2}$倍に拡大または縮小した点である。	解 (1) $\|1+i\|=\sqrt{2}$, $\arg(1+i)=\theta$ $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$　$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{4}$ $\therefore\ 1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$  点$(1+i)z$は点zを原点Oのまわりに$\frac{\pi}{4}$の図転し，それを$\sqrt{2}$倍に拡大したもの (2) ① $\|i\|=1$　$\arg i=\theta_1$ とおくと　$\cos\theta_1=0$, $\sin\theta_1=1$　$\therefore\theta_1=\frac{\pi}{2}$ $\therefore\ i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$  点izは点zを原点Oのまわりに$\frac{\pi}{2}$の回転したもの ② $\|w\|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$, $\arg w=\theta$とおくと$\cos\theta=-\frac{1}{2}$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\theta=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$　$\therefore\ w=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$ 点wzは点zを原点Oのまわりに$\frac{2}{3}\pi$の回転したもの  (3) ① $2\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$を$z$に掛ければよいから $2\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}z=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)z=(2-2i)z$〃 ② $\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$を$z$に掛ければよいから $\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)z=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)z=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)z$〃 	• $1+i$を掛けることはその極形式における偏角分，原点のまわりに回転し，原点からの距離を絶対値分倍したものになること。 • (2)の問題のように絶対値が1との積は原点のまわりの偏角分の回転したものになること。極形式の表し方には習熟しているのでスムーズに解ける。 • 逆に原点のまわりにθの回転し，それをγ倍に拡大または縮小することは偏角θ，絶対値γの極形式$\gamma(\cos\theta+i\sin\theta)$を掛けることになる。 • 3の(2)のように原点のまわりにθの回転したものは偏角θ，絶対値1の極形式$\cos\theta+i\sin\theta$を掛けることの理解についても問題はない。	• 定点zと点zを移動した点$(1+i)z$の関係は$1+i$の極形式を求める問題，根幹は三角関数の角度を求める問題に帰着できる。 • 逆に原点のまわりのθの回転し，それをγ倍することは，偏角をθ，絶対値をγとする極形式$\gamma(\cos\theta+i\sin\theta)$を求める問題，やはりここでも三角関数の値を求める問題に帰着できる。
EX12　次の点zを表す複素数を求めよ。 (1) 点zを原点Oを中心として$\frac{\pi}{2}$回転し，$2-3i$だけ平行移動した点z (2) 2点$\alpha=4-i$, $\beta=2+i$に対し，点αを，点βを中心として$\frac{\pi}{3}$だけ回転した点z 解 回転と平行移動の組合せ 回転→複素数の積 平行移動→複素数の和	◦原点における回転と平行移動の合成 原点のまわりのθの回転 ⇔ 極形式，$\cos\theta+i\sin\theta$を掛ける $w=u+vi$の平行移動 ⇔ $w=u+vi$を加える ◦一般の点における回転 2点α,βについて，点αを点βを中心に角θだけ回転した点zはα,βを用いて表される。$-\beta$だけ平行移動して，点α, zがそれぞれ点α', z'に移ったとすると$\alpha'=\alpha-\beta$, $z'=z-\beta$，点α'を原点を中心に角θだけ回転すると点z'に一致するから $z'=\alpha'(\cos\theta+i\sin\theta)$ $\therefore\ z-\beta=(\alpha-\beta)(\cos\theta+i\sin\theta)$ $\therefore\ z=\beta+(\alpha-\beta)(\cos\theta+i\sin\theta)$	解 (1)偏角$\frac{\pi}{2}$，絶対値1の極形式，$\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$を$z$に掛けて$iz$を得る。 それを$2-3i$だけ平行移動することは加えて　$z=iz+2-3i$ (2)点βが原点Oに移る平行移動$-\beta$で，点α, zが移った点をα', z'とする。 $\therefore\ \alpha'=\alpha-\beta=(4-i)-(2+i)=2-2i$, $z'=z-\beta$ 点z'は点α'を，原点を中心として$\frac{\pi}{3}$だけ回転した点 $z'=\alpha'\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ $=(2-2i)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=(1+\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)i$ $\therefore\ z=z'+\beta=(1+\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)i+(2+i)=(3+\sqrt{3})+\sqrt{3}i$〃	• 原点Oのまわりの回転は極形式$\cos\theta+i\sin\theta$を掛けること，そしてwの平行移動はwを加えることについては問題なく処理できる。 • 一般の点における回転を既習の原点における回転に直結して考えられない。	• 原点の回りの回転後平行移動の合成は極形式を掛けて，平行移動の分の和の合成に帰着できる。 • 原点のまわりの回転に帰着させるために点βを原点Oに移す，平行移動を点α, zに施す。それらの点における原点のまわりの回転移動後，逆の平行移動から求める。

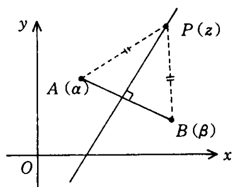
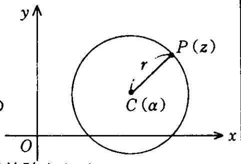
指導細案(No.5)

問題，解法の手順	前提内容，関連事項	解法，技能，計算技術	誤り易い箇所	指導上の留意点
EX13　複素平面上で，原点をOとし，$2\sqrt{3}+2i$ を表す点をAとするとき，OAを斜辺とする直角二等辺三角形の第3の頂点 z を表す複素数を求めよ。 解　OAは斜辺とする直角二等辺三角形は2つある。直角二等辺三角形の等角は $\frac{\pi}{4}$ で，等辺の長さは斜辺の $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍である。 [1]点 z が斜辺OAの上にあるとき OAをOのまわりに $\frac{\pi}{4}$ 回転し，それを $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍した線分の端点 [2]点 z が斜辺OAの下方にあるとき $-\frac{\pi}{4}$ 回転し，$\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍した線分の端点	・複素数の図形への応用 ・線分OAの端点Aの表す複素数が既知で，OAを斜辺とすると直角二等辺三角形の第3の頂点 z を表す複素数を求める問題 点 z は，OAをOの回りに $\frac{\pi}{4}$ または $-\frac{\pi}{4}$ 回転させ，それを $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍に縮小したもの したがって点 z は、 $2\sqrt{3}+2i$ に極形式 $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ または $\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$ を掛けたもの 	解 [1]偏角 $\frac{\pi}{4}$，絶対値 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の極形式 $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\frac{1}{2}(1+i)$ を $2\sqrt{3}+2i$ に掛ける。 $z=(2\sqrt{3}+2i)\frac{1}{2}(1+i)=(\sqrt{3}+i)(1+i)=(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)i$ 〃 [2]偏角 $-\frac{\pi}{4}$，絶対値 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の極形式 $\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\frac{1}{2}(1-i)$ を $2\sqrt{3}+2i$ に掛ける。 $z=(2\sqrt{3}+2i)\frac{1}{2}(1-i)=(\sqrt{3}+i)(1-i)$ $=(\sqrt{3}+1)-(\sqrt{3}-1)i$ 〃 	・OAをOのまわりに $\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)$ 回転し，それを $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍に縮小する発想は思いつかない。 距離に着目 $\|2\sqrt{3}+2\|^2=4$ $\|z\|=2\sqrt{2}$ OAの中点をMとするとM $(\sqrt{3}+i)$ $\therefore \|z-(\sqrt{3}+i)\|=2$ ・回転に着眼してもOAの上方の点 z への $\frac{\pi}{4}$ 回転しか考えられない。	・EX10〜12まで学習したことを生かす。 点 $A(2\sqrt{3}+2i)$ を回転(回転・移動とするため) ・縮小することによって点 z に重ねられないかとやってみる。それが $\pm\frac{\pi}{4}$ 回転かつ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍の縮小に結び付いていく。 ・OAの上方と下方に点 z がとれて，それぞれ $\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}$ 回転を考えていく必要性を押さえる。
EX14　次の値を計算せよ (1) $(1-\sqrt{3}i)^6$ (2) $(\sqrt{3}+i)^{-3}$ 解　累乗の先に複素数を極形式で表す。 次にド・モアブルの定理を用いて計算する。	・ド・モアブルの定理 $z=\cos\theta+i\sin\theta$ の累乗について $(\|z\|=1)$ $z^2=zz=\cos(\theta+\theta)+i\sin(\theta+\theta)=\cos2\theta+i\sin2\theta$ $z^3=zz^2=\cos(\theta+2\theta)+i\sin(\theta+2\theta)=\cos3\theta+i\sin3\theta$ したがって，一般の $n=1,2,3,\cdots$ に対して　$z^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ $\frac{1}{z}=\cos(0-\theta)+i\sin(0-\theta)=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$ $z^{-n}=\frac{1}{z^n}=\left(\frac{1}{z}\right)^n=\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta), z^0=1$ と定義する。 整数 n に対して $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ 一般に $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ に対して $z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$ が成り立つ	解 (1) $\|1-\sqrt{3}i\|=\sqrt{1+3}=2$　$\arg(1-\sqrt{3}i)=\theta(-\pi<\theta\leqq\pi)$ とおく $\cos\theta=\frac{1}{2}$，$\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$　$\theta=-\frac{\pi}{3}$ $\therefore 1-\sqrt{3}i=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$ 与式 $=\left[2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}\right]^6$ $=2^6\left[\cos\left\{\left(-\frac{\pi}{3}\right)\times6\right\}+i\sin\left\{\left(-\frac{\pi}{3}\right)\times6\right\}\right]$ $=64\{\cos(-2\pi)+i\sin(-2\pi)\}=64$ 〃 (2) $\|\sqrt{3}+i\|=\sqrt{3+1}=2$　$\arg(\sqrt{3}+i)=\theta(-\pi<\theta\leqq\pi)$ とおく $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\theta=\frac{1}{2}$　$\theta=\frac{\pi}{6}$ 与式 $=\left\{2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right\}^{-3}=2^{-3}\left\{\cos\frac{\pi}{6}\times(-3)+i\sin\frac{\pi}{6}\times(-3)\right\}$ $=\frac{1}{8}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}=\frac{1}{8}\cdot(-i)=-\frac{1}{8}i$ 〃  	・ド・モアブルの定理の利用ができないため，$(1-\sqrt{3}i)$ を6回掛けようとして失敗する。 ・n 乗の n が正であるときはド・モアブルの定理をスムーズに利用できるが n が負のとき，不慣れなため利用できない ・$z^n=\{r(\cos\theta+i\sin\theta)\}^n$ の計算で r^n を忘れることがある。	・ド・モアブルの定理を用いるには極形式で表すことが基本である。 このとき偏角 θ を $-\pi<\theta\leqq\pi$ にとる。 ・n乗のnが正，0，負でもド・モアブルの定理が成り立つことを強調して，定理を使用する中で再確認する。 ・$z=\{r(\cos\theta+i\sin\theta)\}$ について z^n を求めるとき，r^n を落としやすいので注意をする。
EX15　次の問いに答えよ。 (1)　1の3乗根を求めよ。 (2)　次の方程式を解け。 $z^4=8(-1+\sqrt{3}i)$ ……………① 解 (1) $z^3=1$ となるような z を求める。 $\|z^3\|=\|z\|^3=1$ より $\|z\|=1$ $1=\cos0+i\sin0$ より $\arg z^3=3\arg z=2k\pi$ $\therefore \arg z=\frac{2k\pi}{3}$ $0\leqq\arg z<2\pi$ より　$0\leqq\frac{2k\pi}{3}<2\pi$ $\therefore k=0,1,2$ $z_k=\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}$ $=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^k=z_1^{\,k}$ (2) $8(-1+\sqrt{3}i)=16\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ $=16\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$ $z^4=16\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$ となるような z を求める。 $\|z^4\|=16$　$\|z\|>0$ より $\|z\|=2$ $4\arg z=\frac{2}{3}\pi+2k\pi$ $\therefore \arg z=\frac{3k+1}{6}\pi$ $0\leqq\arg z<2\pi$ より $0\leqq\frac{3k+1}{6}\pi<2\pi$　$\therefore k=0,1,2,3$ $z_k=2\left(\cos\frac{3k+1}{6}\pi+i\sin\frac{3k+1}{6}\pi\right)$	・n 乗根 n：自然数　方程式 $z^n=1$ を満たす複素数 z を1（絶対値1，偏角0）の n 乗根という。1の n 乗根は n 個あり，その絶対値は1で偏角は $\frac{2k\pi}{n}(k=0,1,2\cdots,n-1)$ それらはすべて，複素数平面上の単位円周上 $(\|z\|=1)$ にあり，点1をひとつの頂点とする正 n 角形の頂点（単位円を n 等分する点）となっている。$\|z^n\|=\|z\|^n=1$　$\arg z^n=n\arg z=2k\pi$　$\therefore \|z\|=1, \arg z=\frac{2k\pi}{n}$ また $z_k=z_1^{\,k}, z_k=z_{k-1}z_1$　複素数 $\alpha(\neq1)$，方程式 $z^n=\alpha$ の解を α の n 乗根という。 α の絶対値を r，偏角を θ とすると α の n 乗根は n 個あり，その絶対値は $\sqrt[n]{r}$ で，偏角は $\frac{\theta+2k\pi}{n}=\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}(k=0,1,2,\cdots,n-1)$ それらはすべて，複素数平面上の原点Oを中心とする半径 $\sqrt[n]{r}$ の円周上にあり，正 n 角形の頂点になっている。 $\|z\|^n=r(>0)$　$n\arg z=\theta+2k\pi$　$\therefore \|z\|=\sqrt[n]{r}$　$\arg z=\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}$　$k=0,1,2,\cdots,n-1$ ・$\alpha(\neq0)$ の n 乗根と1の n 乗根との関連 $(\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta))$ 複素数 α の n 乗根の1つを z_0 とする。1の n 乗根を $w_k(k=0,1,2,\cdots,n-1)$ とすると，α の n 乗根 z_k は，n 個の複素数 $z_0w_k(k=0,1,2,\cdots,n-1)$ で与えられる。 〔証〕$z_0=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}\right)$ ド・モアブルの定理から $z_0^n=\gamma(\cos\theta+i\sin\theta)=\alpha$ $z_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)=z_0w_k$　（終）	(1)求めるものを z とすると　$z^3=1$ …① $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ …②とおく ②を①に代入 $r^3(\cos3\theta+i\sin3\theta)=1$ $=\cos0+i\sin0\leftarrow\begin{cases}\|1\|=1\\ \arg1=0\end{cases}$ 絶対値 $r^3=1$　$\therefore r=1$ …③ 偏角 $3\theta=0+2k\pi$　$\therefore \theta=\frac{2}{3}k\pi$ …④ $0\leqq\theta<2\pi$ より $0\leqq\frac{2}{3}k\pi<2\pi$　$\therefore k=0,1,2,3$ 〔1〕$k=0$ のとき④より $\theta=0$ ②,③より $z_0=\cos0+i\sin0=1$ 〃 〔2〕$k=1$ のとき　$\theta=\frac{2}{3}\pi$　$z_1=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ 〃 〔3〕$k=2$ のとき　$\theta=\frac{4}{3}\pi$　$z_2=\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ 〃 (2)　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ …②とおく ②を①に代入　$r^4(\cos4\theta+i\sin4\theta)=8(-1+\sqrt{3}i)$ $=16\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ $=16\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)\leftarrow\begin{cases}\|-1+\sqrt{3}i\|=2\\ \arg(-1+\sqrt{3}i)=\frac{2}{3}\pi\end{cases}$ 絶対値 $r^4=16$　$r>0$ より　$r=2$ …③ 偏角 $4\theta=\frac{2}{3}\pi+2k\pi$：$\theta=\frac{3k+1}{6}\pi$　$0\leqq\theta<2\pi$ より $0\leqq\frac{3k+1}{6}\pi<2\pi$ $\therefore k=0,1,2,3$ 〔1〕$k=0$ のとき④より $\theta=\frac{\pi}{6}$ ②,③より $z_0=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}+i$ 〃 〔2〕$k=1$ のとき　$\theta=\frac{2}{3}\pi$　$z_1=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)=1+\sqrt{3}i$ 〃 〔3〕$k=2$ のとき　$\theta=\frac{7}{6}\pi$　$z_2=2\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi\right)=-\sqrt{3}-i$ 〃 〔4〕$k=3$ のとき　$\theta=\frac{5}{3}\pi$　$z_3=2\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right)=1-\sqrt{3}i$ 〃   点1を含み単位円を3等分する点  	・n 乗根の定義は実数の場合と同様であるから1の3乗根は $z^3=1$ となるような z を求めることは容易にわかることである。 ・偏角について $3\theta=0$ としてしまいがちである。 ・絶対値について $r>0$ を忘れて，$r=\pm2$ と求めてしまうミスをする。 ・偏角が正確にとれないために，極形式で表すときにミスをする。	・$z^3=1$ の解法について 因数分解して $(z-1)(z^2+z+1)=0$ $\therefore z=1, z^2+z+1=0$ 解の公式を用いて $z=1, \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 極形式を用いて解いた答えと一致することを確認し，それらが点1を分点の1つとする単位円を3等分する分点となっていることに気付く。 ・偏角の等式については 2π の整数倍を除いて一致することを意味していることを再確認し，$3\theta=0+2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots)$ とする。 ・絶対値は点 z と原点Oとの距離を定義したものであるから $r>0$　$r=2$ のみを用いる。 ・$\|-1+\sqrt{3}i\|=2$ であるから2を括り出した式 $8(-1+\sqrt{3}i)=16\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ をきちんと書いて $16\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$ とする。 偏角も単位円で求めるとミスが少なくなる。 ・解は点 z_0 を含み，半径2の円を4等分する点になっていることに気付く。

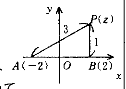
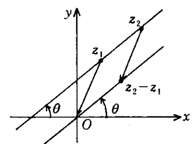
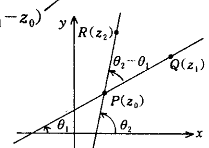
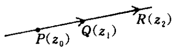
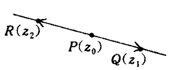
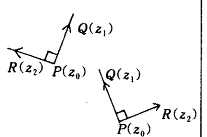
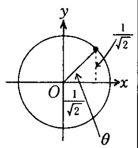
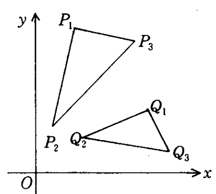
指導細案(No.6)

問題，解法の手順	前提内容，関連事項	解法，技能，計算技術	誤り易い箇所	指導上の留意点
EX16次の問いに答えよ。 (1) 2 点 $\alpha=-1+2i, \beta=3-i$ を通る直線の方程式を求めよ。 (2)点 z が 2 点 $\alpha(1), \beta(i)$ を通る直線上を動くとき，$w=2iZ$ の軌跡を求めよ。 (3)2点 $\alpha=4-i, \beta=-2+3i$ を結ぶ線分 $\alpha\beta$ を3：2に内分する点 γ，および外分する点 δ を表す複素数を求めよ。 解(1)，(2) 2 点 α, β を通る直線は $z=(1-t)\alpha+t\beta$ …① 逆に①は2点 α, β を通る直線 (3) $m:n$ に内分点 γ，外分点 δ $\gamma=\dfrac{n\alpha+m\beta}{m+n}$，$\delta=\dfrac{-n\alpha+m\beta}{m-n}$	・直線の方程式 $\alpha(\neq 0)$：複素数，原点Oと点 α を通る直線上の点を z とする。$z=t\alpha$（t：実数）…① ①と同様に $w=t(\beta-\alpha)$（t：実数）…② は原点Oと点 $\beta-\alpha$ を通る直線上の点 w ②上の点 w に α だけ平行移動を行った点 z は $z=\alpha+w=\alpha+t(\beta-\alpha)=(1-t)\alpha+t\beta$ …③ 点 z は 2 点 α, β を通る直線上を動く。$t=0$ のとき，$z=\alpha$，$t=1$ のとき，$z=\beta$ $0<t<1$ のとき，③は z が 2 点 α, β を結ぶ線分 $\alpha\beta$ を $t:1-t$ に内分する点  ・$m(>0), n(>0)$ について $t=\dfrac{m}{m+n}$ とおくと③より $z=\left(1-\dfrac{m}{m+n}\right)\alpha+\dfrac{m}{m+n}\beta=\dfrac{n\alpha+m\beta}{m+n}$ …④ $t:(1-t)=\dfrac{m}{m+n}:\left(1-\dfrac{m}{m+n}\right)=m:n$ ④は 2 点 α, β を結ぶ線分 $\alpha\beta$ を $m:n$ に内分する点 ・$t=\dfrac{m}{m-n}$ とおく②より $z=\left(1-\dfrac{m}{m-n}\right)\alpha+\dfrac{m}{m-n}\beta=\dfrac{-n\alpha+m\beta}{m-n}$ 〔1〕$m>n>0$ のとき，$t>1$ となり点 z は α, β を結ぶ線分 $\alpha\beta$ を $t:(t-1)=\dfrac{m}{m-n}:\left(\dfrac{m}{m-n}-1\right)=m:n$ の比に外分する。 〔2〕$0<m<n$ のとき $t<0$ となり点 z は $\alpha\beta$ を結ぶ線分 $\alpha\beta$ を $-t:(1-t)=\dfrac{-m}{m-n}:\left(1-\dfrac{m}{m-n}\right)=m:n$ の比に外分する。	解 (1)点 z は線分 $\alpha\beta$ を $t:1-t$ に内分する点　$z=(1-t)\alpha+t\beta$ より $\therefore z=(1-t)(-1+2i)+t(3-i)=-1+2i+t(4-3i)$ 〃 (2)　$z=(1-t)\alpha+t\beta$ より $\therefore z=(1-t)+ti$ …① $w=2iz$ …② ①を②へ代入して $w=2i\{(1-t)+ti\}=(1-t)\cdot 2i+t\cdot(-2)$ 点 w は 2 点 $2i, -2$ を通る直線を描く。〃 (3) $\gamma=\dfrac{2(4-i)+3(-2+3i)}{3+2}=\dfrac{2+7i}{5}$ 〃 $\delta=\dfrac{-2(4-i)+3(-2+3i)}{3-2}=-14+11i$ 〃	・2 点 α, β を通る直線は $z=(1-t)\alpha+t\beta$ と暗記して用いるのは難しい。 ・逆の $w=2i\{(1-t)+ti\}$ を変形して $w=(1-t)\cdot 2i+t(-2)$ から 2 点を通る直線を判断するのに慣れていない。 ・内分点はミスが少ないが外分点は公式を用いるときにミスをする。	・点 z は線分 $\alpha\beta$ を $t:1-t$ に内分する点と覚えておいて，$z=(1-t)\alpha+t\beta$ を導いてから複素数の値を代入する。 ・$z=(1-t)\alpha+t\beta$ は 2 点 α, β を通る直線を表すことを強調して，公式を暗記することによりすぐ引き出すことができるようにする。 ・内分点 $z=\dfrac{n\alpha+m\beta}{m+n}$ 外分点 $m:(-n)$ あるいは $-m:n$ とする $z=\dfrac{-n\alpha+m\beta}{m+(-n)}$ 
EX17次の事柄を証明せよ。 (1)複素平面上の3点 $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$ を 3 頂点とする $\triangle ABC$ の重心 G は $\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$ で表される。 (2) $\triangle ABC$ の 3 辺 BC, CA, AB をそれぞれ3：2に内分する点を P, Q, R とするとき $\triangle ABC$ と $\triangle PQR$ の重心は一致する。（複素数を用いよ） 解 (1)線分 BC の中点を $M(w)$ とする。重心 G は中線 AM を 2：1に内分する点 (2) $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma), P(z_1)$, $Q(z_2), R(z_3)$ と定める。内分点から P, Q, R を z_1, z_2, z_3 で表す。$\triangle ABC$，$\triangle PQR$ のそれぞれの重心を(1)で求めた式を用いて求め比較する。	・中点の座標 2 点 α, β の中点 z は線分 $\alpha\beta$ を 1：1に内分する点 $z=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$  ・重心の座標 $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$ を 3 頂点とする $\triangle ABC$ の重心 $G(z)$ のついて 線分 BC の中点 $M(w)$ は，$w=\dfrac{\beta+\gamma}{2}$ …① $G(z)$ は中線 AM を 2：1の内分点 $\therefore z=\dfrac{2w+\alpha}{2+1}$ …② ①を②に代入して $z=\dfrac{2\cdot\dfrac{\beta+\gamma}{2}+\alpha}{3}$ $=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$  	解 (1) 〔証〕線分 BC の中点 $M(w)$ は $w=\dfrac{\beta+\gamma}{2}$ …① 重心 G は中線 AM を 2：1に内分する点 G は $\dfrac{\alpha+2w}{3}=\dfrac{\alpha+2\dfrac{\beta+\gamma}{2}}{3}$（∵①） $=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$ よって $\triangle ABC$ の重心 G は $\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$ で表される(終)  (2) 〔証〕右図のように点を定める。 P, Q, R はそれぞれが属する線分を 3：2 に内分する点 $z_1=\dfrac{2\beta+3\gamma}{5}$，$z_2=\dfrac{2\gamma+3\alpha}{5}$，$z_3=\dfrac{2\alpha+3\beta}{5}$ $\Big\}$ …① $\triangle ABC$ の重心 $G(w)$ は，(1)より $w=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$ $\triangle PRQ$ の重心 $G'(w')$ は $w'=\dfrac{z_1+z_2+z_3}{3}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2\beta+3\gamma}{5}+\dfrac{2\gamma+3\alpha}{5}+\dfrac{2\alpha+3\beta}{5}\right)$ （∵①） $=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$　　$\therefore w=w'$（終）〃  	・重心の定義をしっかりつかんでおくことが必要である。直接には示されない。 ・内分点 z_1, z_2, z_3 は公式により簡単に求められる。 ・(1)より $\triangle ABC$ の重心，$\triangle PRQ$ の重心それぞれを求めることもスムーズにできる。	・三角形の 3 中線は 1 点で交わり，その交点を重心ということ，重心によって各中線は 2：1に内分されることを確認しておく。 ・内分点  $z_1=\dfrac{2\beta+3\gamma}{3+2}$ $z_2=\dfrac{2\gamma+3\alpha}{3+2}$ $z_3=\dfrac{2\alpha+3\beta}{3+2}$  ・重心 $w=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$ $w'=\dfrac{z_1+z_2+z_3}{3}$ 
EX18次の点を表す複素数を求めよ。 (1) $\triangle ABC$ の 2 頂点 A, B および重心 G を表す複素数をそれぞれ $-1-i, 8+i, 4+2i$ とするとき，頂点 C (2)複素平面上の 3 点 $z_1=3+5i, z_2=1-3i, z_3=1-i$ をそれぞれ P, Q, R とするとき，平行四辺形 $PQRS$ の頂点 S 解 (1) $C(x+yi)$ とする。 $\triangle ABC$ の重心が G であるから複素数の関係式を作り，C を求める。 (2) $S(z), z=x+yi$ とする。 平行四辺形の対角線は中点で交わることを利用する。	・平行四辺形の第 4 の頂点 $D(z)$ について 平行四辺形の性質 （i）向かい合う 2 組の辺は等しくかつ平行である。 （ii）対角線は中点で交わる （i）を利用 $AD \mathbin{/\!\!/} BC$　$w=z_3-z_2$ …①だけの平行移動によって z_1 は z に移る $\therefore z=z_1+w$ …②　①を②に代入して $z=z_1+z_3-z_2$ （ii）を利用　対角線 AC の中点 $M(w)$ と BD の中点 $M'(w')$ は一致する $w=\dfrac{z_1+z_3}{2}$　$w=\dfrac{z_2+z}{2}$　$w=w'$ より $\dfrac{z_1+z_3}{2}=\dfrac{z_2+z}{2}$ $\therefore z=z_1+z_3-z_2$  	解 (1) $C(x+yi)$ と定めると重心の公式より $\dfrac{(-1-i)+(8+i)+(x+yi)}{3}=4+2i$ $\therefore \dfrac{(x+7)+yi}{3}=4+2i$ $(x+7)+yi=12+6i$ x, y は実数より $x+7$ も実数　$\therefore x+7=12, y=6$ $\therefore x=5, y=6$　$\therefore C(5+6i)$ 〃  (2) $S(z), z=x+yi$ と定めると PR の中点 $M(w)$ は $w=\dfrac{z_1+z_3}{2}=\dfrac{(3+5i)+(1-i)}{2}=2+2i$ QS の中点 $M'(w')$ は $w'=\dfrac{z_2+z_4}{2}=\dfrac{(1-3i)+(x+yi)}{2}=\dfrac{(x+1)+(y-3)i}{2}$ 中点は一致するから $w=w'$　$\therefore \dfrac{(x+1)+(y-3)i}{2}=2+2i$ $\therefore (x+1)+(y-3)i=4+4i$ x, y は実数より $x+1, y-3$ も実数　$\therefore x+1=4, y-3=4$ $\therefore x=3, y=7$　$\therefore S(3+7i)$ 〃  	・$4+2i$ の表す複素数を C と間違えて $\dfrac{(-1-i)+(8+i)+(4+2i)}{3}$ $=\dfrac{11+2i}{3}$ とする。 ・式の変形後 i で整理すると複素数の相等条件を使うところが出る。これが使えないために解けない。 ・平行四辺形の対辺は平行でかつ長さが等しい性質を用いて解くものもいる。	・$4+2i$ の表す複素数は G であるから $\triangle ABC$ の頂点 C は未知である。このことより，$C(x+yi)$ とおいて重心の公式を利用して求める。 ・複素数の相等条件 a, b, c, d が実数のとき $a+bi=c+di$ $\Leftrightarrow a=c, b=d$ を確認する。 ・内分点に続いて中点もちょうど前問で学習したことであるので関連性からこの解法をとった。

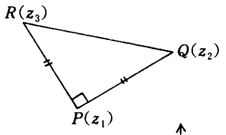
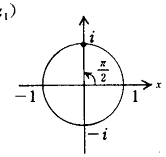
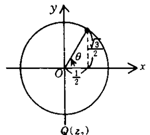
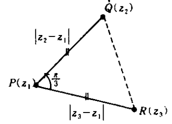
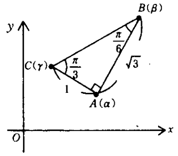
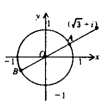
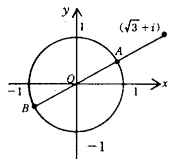
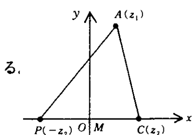
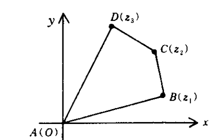
指導細案(No.7)

問題，解法の手順	前提内容，関連事項	解法，技能，計算技術	誤り易い箇所	指導上の留意点
EX19次の式を満たす点 z の軌跡を求めよ。 $\lvert z+2\rvert=\lvert z-i\rvert$ 解 左辺＝ $\lvert z-(-2)\rvert$ は2点 z と -2との間の距離 右辺は2点 z と i との間の距離を表わし，左辺＝右辺であるから点 z は2点 $A(-2)$, $B(i)$ から等距離にある。	・垂直2等分線 異なる2点 $A(\alpha)$，$B(\beta)$ を結ぶ線分 AB の垂直2等分線上の点 $P(z)$ は $AP=BP$ $\therefore \lvert z-\alpha\rvert=\lvert z-\beta\rvert$ …① を満たす点  逆に①を満たす点 z は2点 $A(\alpha)$，$B(\beta)$ からの距離が等しい点であるから，線分 AB の垂直2等分線が軌跡となる。	解 $\lvert z+2\rvert=\lvert z-(-2)\rvert$ であるから 等式 $\lvert z-(-2)\rvert=\lvert z-i\rvert$ 2点 z と -2 との距離と2点 z と i との距離が等しい。 $A(-2)$，$B(i)$ とすると 点 z は2点 $A(-2)$，$B(i)$ から等距離にある点，したがって軌跡は線分 AB の垂直2等分線〃	・ $\lvert z-i\rvert$ は2点 z と i の間の距離を表すのは問題ないが $\lvert z+2\rvert$ ははっきりしない。 ・ $\lvert z-(-2)\rvert=\lvert z-i\rvert$ の等号の意味についてもすっきり説明がつかない。	・ $\lvert z+2\rvert=\lvert z-(-2)\rvert$ と変形することによって2点 z と (-2) との間の距離を表すことがはっきりする。 ・点 z は共通の点である。等号は点 z が2点 $A(-2)$，$B(i)$ から等しい距離の点を意味する。
EX20次の式を満たす点 z の軌跡を求めよ。 (1) $\lvert z-2+3i\rvert=4$ (2) $\lvert iz-2\rvert=1$ (3) $z\bar{z}=2$ 解 (1)変形して $\lvert z-(2-3i)\rvert=4$ (2) $iz-2=i(z+2i)$ $\lvert iz-2\rvert=\lvert i(z+2i)\rvert$ $=\lvert i\rvert\lvert z+2i\rvert=\lvert z+2i\rvert$ $\therefore \lvert z-(-2i)\rvert=1$ (3)関係式 $\lvert z\rvert^2=z\bar{z}$ より $\lvert z\rvert^2=2$	・円 点 $C(\alpha)$ を中心とする半径 r の円周上の点 $P(z)$ は 条件 $\lvert z-\alpha\rvert=r$ …①を満たす点 逆に①を満たす点 z は2点 z と α との間の距離が常に r の点である  から，点 C を中心とする半径 r の円が軌跡となる。 ①の形でわかるように z の係数が1となっていることに注意する。 特に原点 O を中心とする半径 r の円周上の点 $P(z)$ は $\lvert z\rvert=r$ を満たす点	解 (1) $\lvert z-2+3i\rvert=\lvert z-(2-3i)\rvert$ $\therefore \lvert z-(2-3i)\rvert=4$ よって z は点 $2-3i$ を中心とする半径4の円〃 (2) $iz-2=i(z+2i)$ $\lvert iz-2\rvert=\lvert i(z+2i)\rvert=\lvert i\rvert\lvert z+2i\rvert=\lvert z+2i\rvert$ $\therefore \lvert z-(-2i)\rvert=1$ よって z は点 $-2i$ を中心とする半径1の円〃 (3) $z\bar{z}=2$ …① 関係式 $\lvert z\rvert^2=z\bar{z}$ …② ②を①に代入して $\lvert z\rvert^2=2$ $\therefore \lvert z\rvert=\sqrt{2}$ よって z は原点 O を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円〃	・ $\lvert z-2+3i\rvert=4$ のままの形から2点 z と $2+3i$ との間の距離が一定の4であると読みとるとミスをする。 ・ z の係数が i であり，これを1にする仕方がわからずとまどう。 ・ $z\bar{z}$ と関係付けるものが $\lvert z\rvert^2$ であることに気づかない。	・変形して $\lvert z-(2-3i)\rvert=4$ から2点 z と $2-3i$ との間の距離が一定の4であることを理解する。 ・ $\lvert i\rvert=1$ に留意し，$iz-2$ で i を括り出し， $\lvert i(z+2i)\rvert=\lvert i\rvert\lvert z+2i\rvert$ を用いて変形すると z の係数を1にできる。 ・ $\lvert z\rvert^2=z\bar{z}$ を確認し，$\lvert z\rvert>0$ に注意し $\lvert z\rvert$ について解く。
EX21次のように表される点 w の軌跡を求めよ。 (1)点 z が原点 O を中心とする半径2の円上を動くとき，点 -4 と点 z を結ぶ線分の中点 w (2)複素数 z が等式 $\lvert z\rvert=1$ を満たすとき， ① $w=i(z+2)$ ② $w=\frac{z+2}{z}$ 解 (1) 点 z は中心O，半径2の円上 $\lvert z\rvert=2$, w は2点 -4 と z を結ぶ線分の中点 $w=\frac{-4+z}{2}$ これを z について解いて $\lvert z\rvert=2$ に代入し w についての等式を得る。 (2) $\lvert z\rvert=1$ …① (i) $w=i(z+2)$ から z について解く。それを①に代入して w についての等式を得る。 (ii) $w=\frac{z+2}{z}$ から z について解く。 $w\neq 1$ を確かめてから解く。 〔1〕z について解いた式を①に代入して $w-1$ についての等式を得る。 〔2〕$\bar{z}$ についての式を導き①から $\lvert z\rvert^2=1$ $\therefore z\bar{z}=1$ に z と $\bar{z}$ の式の両方を代入して $w-1$ についての等式を得る。	・軌跡の問題 点 z がある図形上を動くとき，それにともなって動く点 w の描く図形。点 z が円 $\lvert z\rvert=1$ を描くとき，$w=(1+i)(z-1)$ の軌跡を求めよ。 〔解〕$\lvert z\rvert=1$ …①　$w=(1+i)(z-1)$ を z について解くと $z-1=\frac{w}{1+i}$ $\therefore z=\frac{w}{1+i}+1=\frac{1}{1+i}(w+1+i)$ よって $\lvert z\rvert=\left\lvert\frac{1}{1+i}(w+1+i)\right\rvert=\left\lvert\frac{1}{1+i}\right\rvert\lvert w+1+i\rvert$ $=\frac{1}{\lvert 1+i\rvert}\lvert w+1+i\rvert=\frac{1}{\sqrt{2}}\lvert w+1+i\rvert$ ①より $\frac{1}{\sqrt{2}}\lvert w+1+i\rvert=1$ $\therefore \lvert w-(-1-i)\rvert=\sqrt{2}$ したがって，w は点 $-1-i$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円を描く。 〔別解〕$w=(1+i)(z-1)$ より $z=\frac{w}{1+i}+1$ …② $\therefore \bar{z}=\overline{\frac{w}{1+i}+1}$ $=\frac{\overline{w}}{\overline{1+i}}+1$ …③，一方①より $\lvert z\rvert^2=1$ $\therefore z\bar{z}=1$ …④ ②，③を④に代入 $\left(\frac{w}{1+i}+1\right)\left(\frac{\overline{w}}{\overline{1+i}}+1\right)=1$ $\{w+(1+i)\}\{\overline{w}+(\overline{1+i})\}=(1+i)(\overline{1+i})=(1+i)(1-i)=2$ $\therefore (w+1+i)(\overline{w+1+i})=2$ $\therefore \lvert w+1+i\rvert^2=2$ $\therefore \lvert w+1+i\rvert=\sqrt{2}$ したがって，w は点 $-1-i$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円を描く。	解 (1) $\lvert z\rvert=2$ …① $w=\frac{-4+z}{2}$ …② ②より $z=2w+4=2(w+2)$ …③ ③を①に代入 $\lvert 2(w+2)\rvert=2$ $2\lvert w+2\rvert=2$ $\therefore \lvert w-(-2)\rvert=1$ よって w は点 -2 を中心とする半径1の円〃 (2) $\lvert z\rvert=1$ …① (i) $w=i(z+2)$ より $z+2=\frac{w}{i}$ $\therefore z=\frac{w}{i}-2=\frac{1}{i}(w-2i)$ …② ②を①に代入 $\left\lvert\frac{1}{i}(w-2i)\right\rvert=1$ $\therefore \frac{1}{\lvert i\rvert}\lvert w-2i\rvert=1$ $\therefore \lvert w-2i\rvert=1$ よって w は点 $2i$ を中心とする半径1の円〃 (ii) $w=\frac{z+2}{z}$ より $zw=z+2$ $\therefore z(w-1)=2$ $w=1$ とすると $0=2$ となる（矛盾）から $w\neq 1$ $\therefore z=\frac{2}{w-1}$ …③ 〔1〕③を①に代入 $\left\lvert\frac{2}{w-1}\right\rvert=1$ $\therefore \frac{2}{\lvert w-1\rvert}=1$ $\therefore \lvert w-1\rvert=2$ よって w は点1を中心とする半径2の円〃 〔2〕③より $\bar{z}=\frac{2}{\overline{w}-1}$ …④ 一方①より $\lvert z\rvert^2=1$ $\therefore z\bar{z}=1$ …⑤ ③，④を⑤に代入 $\frac{2}{w-1}\ \frac{2}{\overline{w}-1}=1$ $\therefore (w-1)(\overline{w}-1)=4$ $\therefore \lvert w-1\rvert^2=4$ $\therefore \lvert w-1\rvert=2$ よって w は点1を中心とする半径2の円〃	・円の方程式，中点の表す複素数については問題はない。この後 z を消去し w についての等式を導くことが難しい。 ・絶対値の性質 ・ $\lvert z_1z_2\rvert=\lvert z_1\rvert\lvert z_2\rvert$ をうまく利用できない。 ・(2)(i)でも $\frac{w}{i}-2$ で w の係数が $\frac{1}{i}$ であり，EX20でも同様でこれを1にする仕方がわからない ・ $w\neq 1$ の吟味を落としてしまう。 ・2(ii)の解法として 〔1〕EX21の (1)，(2)(i)の解法をしようとするが $\lvert w-1\rvert$ が分母にあって結論にいけない 〔2〕$z\bar{z}=1$ を用いる方法はスムーズであるが，自分のものになっていないので十分に使えない。	・ z を消去し，w についての等式を導く方法は次の2つの手順をとる。 1 .w と z についての等式を z について解く。 2 .z について解いた式を条件式に代入することによって z を消去し，w についての等式を導く。 ・複素数の絶対値の性質 $\lvert z_1z_2\rvert=\lvert z_1\rvert\lvert z_2\rvert$ $\left\lvert\frac{z_1}{z_2}\right\rvert=\frac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}$ がうまく引き出せるようにしておくことが大切である。 ・ $\left\lvert\frac{1}{i}\right\rvert=\frac{1}{\lvert i\rvert}=1$ に留意し， $\frac{w}{i}-2$ で $\frac{1}{i}$ を括り出し， $\left\lvert\frac{1}{i}(w-2i)\right\rvert=\frac{1}{\lvert i\rvert}\lvert w-2i\rvert$ を用いて変形する。 ・0で割ってはいけないから $w\neq 1$ を確認する。 ・ $\lvert w-1\rvert$ を両辺に掛けて，分母を払うと結論が見えてくる。 ・ $\lvert z\rvert^2=z\cdot\bar{z}$ を用いることがこれからも増えてくることに注意する。

指導細案(No.8)

問題，解法の手順	前提内容，関連事項	解法，技能，計算技術	誤り易い箇所	指導上の留意点
EX22　複素数平面において，次のように表される点 z の軌跡を求めよ。 (1) 2点 $A(-2)$, $B(2)$ からの距離の比が 3 : 1 である点 $P(z)$ (2)等式 $\|z-4i\|=2\|z-i\|$ を満たしながら変化するときの点 z 解 (1) $AP:BP=3:1$ $\therefore AP=3BP$ $\|z+2\|=3\|z-2\|$ ここまで等式表示すれば(2)と同様な方法で解ける。 (2) $\|z+a\|^2=(z+a)(\overline{z+a})$ を用いて変形	・アポロニウスの円 $m\neq n$ のとき2点 A, B からの距離の比が $m:n$ である点の軌跡は円である。この円のことをいう。 また，$m=n$ のときは，線分 AB の垂直2等分線を表わす。 ・絶対値と共役な複素数の関係 $\|\alpha\|^2=\alpha\cdot\bar{\alpha}$ ・共役な複素数の性質 ・(1) $\overline{\alpha+\beta}=\bar{\alpha}+\bar{\beta}$　(2) $\overline{\alpha-\beta}=\bar{\alpha}-\bar{\beta}$ (3) $\overline{\alpha\beta}=\bar{\alpha}\,\bar{\beta}$　(4) $\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}=\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$	解 (1) $AP:BP=3:1$ $AP=3BP$ $\therefore \|z+2\|=3\|z-2\|$ 両辺を2乗して $\|z+2\|^2=9\|z-2\|^2$ $(z+2)(\overline{z+2})=9(z-2)(\overline{z-2})$ $(z+2)(\bar{z}+2)=9(z-2)(\bar{z}-2)$ $z\bar{z}+2(z+\bar{z})+4=9\{z\bar{z}-2(z+\bar{z})+4\}$ $8z\bar{z}-20(z+\bar{z})=-32$ $z\bar{z}-\frac{5}{2}(z+\bar{z})=-4$ $\left(z-\frac{5}{2}\right)\left(\bar{z}-\frac{5}{2}\right)=-4+\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$ $\left\|z-\frac{5}{2}\right\|^2=\frac{9}{4}$　$\therefore \left\|z-\frac{5}{2}\right\|=\frac{3}{2}$ …点 $\frac{5}{2}$ を中心とする半径 $\frac{3}{2}$ の円〃 (2) $\|z-4i\|=2\|z-i\|$ 両辺を2乗して $\|z-4i\|^2=4\|z-i\|^2$ $(z-4i)(\overline{z-4i})=4(z-i)(\overline{z-i})$ $(z-4i)(\bar{z}+4i)=4(z-i)(\bar{z}+i)$ $z\bar{z}+4i(z-\bar{z})+16$ $=4\{z\bar{z}+i(z-\bar{z})+1\}$　$\therefore 3z\bar{z}=12$ $\therefore z\bar{z}=4$ $\therefore \|z\|^2=4$　$\therefore \|z\|=2$ 原点 O を中心とする半径2の円〃	・題意をきちんととらえて式表示することが難しい ・ $\|z\|^2=z\bar{z}$ が閃かないので変形ができない。 ・(2)では $\overline{z-4i}=\bar{z}-4i$ $\overline{Z-i}=\bar{Z}-i$ のように誤って計算してしまう。 ・ $z\bar{z}-\frac{5}{2}(z+\bar{z})=-4$ から $\left(z-\frac{5}{2}\right)\left(\bar{z}-\frac{5}{2}\right)$ $=-4+\left(\frac{5}{2}\right)^2$ の変形がわからない	・表示するとわかり易い。  $AP:BP=3:1$ 内項の積＝外項の積を用いて $AP=3BP$ 2点間の距離公式より $\|z+2\|=3\|z-2\|$ …①が成り立つ ・ $\|z+2\|^2=(z+2)(\bar{z}+2)$, $\|z-2\|^2=(z-2)(\bar{z}-2)$ を用いるために①の両辺を平方する。 ・(2)では $\overline{z-4i}=\bar{z}-\overline{4i}$, $=\bar{z}+4i$　$\overline{z-i}=\bar{z}-\bar{i}$ $=\bar{z}+i$ のように純虚数の符号が変わることに注意する。 ・両辺に $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ を加えた式をかく $z\bar{z}-\frac{5}{2}(z+\bar{z})+\left(\frac{5}{2}\right)^2$ $=-4+\left(\frac{5}{2}\right)^2$
EX23　次の問いに答えよ。 (1) $z_1=2-2i$, $z_2=3-i$ のとき，2点 z_1 と z_2 を結ぶ直線と実軸の正の向きとのなす角をもとめよ。 (2)複素数 $z_0=1$, $z_1=1+2i$, $z_2=-3+4i$ を表す点をそれぞれ P_0, P_1, P_2 とするとき，$\angle P_1P_0P_2$ の大きさを求めよ。 (3) 3点 $P_0(z_0)$, $P_1(z_1)$, $P_2(z_2)$ において，次の事柄を示せ。 (i) $z_0=2+i$, $z_1=4-i$, $z_2=1+2i$ のとき，3点 P_0, P_1, P_2 は一直線にある。 (ii) $z_0=1+i$, $z_1=3+4i$, $z_2=-2+3i$ のとき，直線 P_0P_1 と P_0P_2 は垂直である。 解 (1) $\arg(z_2-z_1)$　(2) $\arg\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}$ $\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}$ についてその値が (3)実数　(4)純虚数	・直線が実軸の正の向きとなす角 複素数平面上の2点 z_1, z_2 を結ぶ直線が実軸の正の向きとなす角を θ とする。 $-z_1$ だけ平行移動すると，点 z_1 は原点 O に，点 z_2 は点 z_2-z_1 に移るから $\theta=\arg(z_2-z_1)$  ・2直線がなす角 3点 $P(z_0)$, $Q(z_1)$, $R(z_2)$ に対して直線 PR が直線 PQ となす角 $\angle QPR$ は，右図より $\angle QPR=\theta_2-\theta$ $=\arg(z_2-z_0)-\arg(z_1-z_0)$ $=\arg\left(\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}\right)$  ・3点 $P(z_0)$, $Q(z_1)$, $R(z_2)$ が一直線上にある条件 $\angle QPR=0$ または π であるから $\arg\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}=0$ または π したがって $\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}$ は実数 逆も成り立つ。3点 Q, P, R が一直線上にある $\Leftrightarrow \frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}$ が実数   ・2直線 PQ, PR が垂直に交わる条件 $\angle QPR=\frac{\pi}{2}$ または $-\frac{\pi}{2}$ であるから $\arg\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}=\pm\frac{\pi}{2}$ したがって $\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}$ は純虚数　逆も成り立つ。 2直線 PQ, PR が垂直に交わる $\Leftrightarrow \frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}$ が純虚数  	解 (1) $\arg(z_2-z_1)=\arg\{(3-i)-(2-2i)\}=\arg(1+i)=\theta$ とおく $\|1+i\|=\sqrt{2}$, $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$　$\therefore \theta=\frac{\pi}{4}$〃 (2) $\arg\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}=\arg\frac{(-3+4i)-1}{(1+2i)-1}=\arg\frac{4(-1+i)}{2i}$ $=\arg 2(1+i)=\theta$ とおく $\|2(1+i)\|=2\sqrt{2}$, $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$　$\therefore \theta=\frac{\pi}{4}$〃  (3) $z_1-z_0=(4-i)-(2+i)=2-2i=2(1-i)$ $z_2-z_0=(1+2i)-(2+i)=-1+i=-(1-i)$ $\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}=\frac{-(1-i)}{2(1-i)}=-\frac{1}{2}$（実数）したがって3点 P_0, P_1, P_2 は一直線上にある。 (4) $z_1-z_0=(3+4i)-(1+i)=2+3i$ $z_2-z_0=(-2+3i)-(1+i)=-3+2i$ $\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}=\frac{-3+2i}{2+3i}=\frac{(-3+2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\frac{0+13i}{13}=i$（純虚数） したがって $P_0P_1\perp P_0P_2$	・求める角は2点 $z(=z_2-z_1)$ と原点 O を結ぶ直線と実軸の正の向きとのなす角であることから容易に処理できる。しかし $\arg(1+i)$ の求め方は既習であるがまだ自分のものになっていない。 ・ $\angle P_1P_0P_2$ は直線 P_0P_2 と直線 P_0P_1 のなす角であることから処理することは難しいことではない。 ・3点 P_0, P_1, P_2 が一直線上にあることや，直線 P_0P_1 と直線 P_0P_2 が垂直であることを示すには， $\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}$ がそれぞれ実数や純虚数であることを理解していてそれを用いてスムーズに示すことができる。	・ $\arg(z_2-z_1)=\theta(-\pi<\theta\leqq\pi)$ とおいて $\|z_2-z_1\|$ を求めて，図示して $\cos\theta, \sin\theta$ の値から θ を求める。もしくは z_2-z_1 を極形式に表すことから求める。 ・ $\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}$ の分母を実数化して $\left\|\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}\right\|$ や $\arg\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}=\theta$ を求め易くしておく。 ・ $\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}$ が実数や純虚数になることを示すには，分母の z_1-z_0，分子の z_2-z_0 をそれぞれ求めて後 $\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}$ の計算で分母の実数化がし易いように，共通因数での括り出しが有効である。
EX24 3点 $P_1(z_1)$, $P_2(z_2)$, $P_3(z_3)$ を頂点とする三角形 $P_1P_2P_3$ と3点 $Q_1(w_1)$, $Q_2(w_2)$, $Q_3(w_3)$ を頂点とする三角形 $Q_1Q_2Q_3$ について，次のことが成り立つことを証明せよ。 $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\frac{w_3-w_1}{w_2-w_1}$ $\Rightarrow \triangle P_1P_2P_3\backsim Q_1Q_2Q_3$ 解 三角形が相似であることを示すには，ア2角がそれぞれ等しい，イ2辺の長さの比とその間の角がそれぞれ等しい，がある。ここではイを示す。	・2つの三角形の相似条件 ア2角がそれぞれ等しい イ2辺の比とその間の角がそれぞれ等しい EX24でイの場合を示すには $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$ の絶対値と偏角に着目する。	解 $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\frac{w_3-w_1}{w_2-w_1}$ より $\left\|\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right\|=\left\|\frac{w_3-w_1}{w_2-w_1}\right\|$ かつ $\arg\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\arg\frac{w_3-w_1}{w_2-w_1}$ ゆえに $\frac{\|z_3-z_1\|}{\|z_2-z_1\|}=\frac{\|w_3-w_1\|}{\|w_2-w_1\|}$　$\angle z_2z_1z_3=\angle w_2w_1w_3$ よって $\frac{P_1P_3}{P_1P_2}=\frac{Q_1Q_3}{Q_1Q_2}$　$\angle P_2P_1P_3=\angle Q_2Q_1Q_3$ 2辺の比とその間の角がそれぞれ等しい。 よって $\triangle P_1P_2P_3\backsim\triangle Q_1Q_2Q_3$  	・ $\triangle P_1P_2P_3\backsim\triangle Q_1Q_2Q_3$ を示すのに2角がそれぞれ等しいを用いて相似関係を示すのは無理がある。 ・絶対値の性質 $\left\|\frac{\alpha}{\beta}\right\|=\frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|}$ や偏角について $\arg\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$ は $\angle z_2z_1z_3$ を表わすことに気付かないために証明することが難しくなっている。	・三角形の形状や2つの三角形の相似関係を調べるには $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$ などの絶対値と偏角を調べ，2辺の比とその間の角がそれぞれ等しいことを示す。 ・ $\left\|\frac{\alpha}{\beta}\right\|=\frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|}$ を用いて辺の比， $\arg\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\arg\frac{w_3-w_1}{w_2-w_1}$ を用いて $\angle z_2z_1z_3=\angle w_2w_1w_3$，すなわち，その間の角が等しいことを示すことができる。

指導細案(No.9)

問題，解法の手順	前提内容，関連事項	解法，技能，計算技術	誤り易い箇所	指導上の留意点
EX25 次の問いに答えよ。 (1) 3点 $P(z_1),Q(z_2),R(z_3)$ において $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ が成り立つとき，$\triangle PQR$ は，どのような三角形か。 (2) 3点 $A(\alpha),B(\beta),C(\gamma)$ において $\sqrt{3}\gamma-i\beta=(\sqrt{3}-i)\alpha$ が成り立つとき，$\triangle ABC$ は，どのような三角形か 解 (1)絶対値 $\left\|\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right\|=\left\|\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right\|$ 辺の長さの関係 偏角 $\arg\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\arg\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ $\angle z_3z_1z_2$ の大きさ (2) i で整理して $\sqrt{3}(\gamma-\alpha)=i(\beta-\alpha)$ $\therefore\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{1}{\sqrt{3}}i$ ここまで等式表示すれば(1)と同様	・三角形の形状 3点 $P(z_1),Q(z_2),R(z_3)$ において $\triangle PQR$ の形状を調べるには $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$ などの絶対値と偏角を調べるとよい。 $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=i$ が成り立つとき，$\triangle PQR$ はどのような三角形か 〔解〕$\left\|\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right\|=\|i\|=1$ より $\|z_3-z_1\|=\|z_2-z_1\|$ ゆえに $PR=PQ$ また $\arg\left\|\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right\|=\arg i=\frac{\pi}{2}$ ゆえに $\angle QPR=\frac{\pi}{2}$ ($\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$ が純虚数 i であることより $\angle QPR=\frac{\pi}{2}$ を示してもよい) したがって，$\triangle PQR$ は，$\angle P$ を直角とする直角二等辺三角形   	解 (1) $\left\|\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right\|=\left\|\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right\|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$ により $\|z_2-z_1\|=\|z_3-z_1\|$ ゆえに $PQ=PR$ また $\arg\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\arg\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=\theta$ とおく $\left\|\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right\|=1,\cos\theta=\frac{1}{2},\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\therefore\theta=\frac{\pi}{3}$ ゆえに $\angle RPQ=\frac{\pi}{3}$ したがって $\triangle PQR$ は頂角 ($\angle RPQ$) が $\frac{\pi}{3}$ の二等辺三角形，すなわち正三角形〃 (2)変形して $\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{1}{\sqrt{3}}i$ $\left\|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right\|=\left\|\frac{1}{\sqrt{3}}i\right\|=\frac{1}{\sqrt{3}}$ より $\|(\beta-\alpha)\|=\sqrt{3}\|\gamma-\alpha\|$ ゆえに $AB=\sqrt{3}AC$ …① また，$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が純虚数であるから2直線 AB,AC は垂直に交わり，$\angle BAC=\frac{\pi}{2}$ …② ①，②より $\angle ABC=\frac{\pi}{6}$ $\angle BCA=\frac{\pi}{3}$ したがって $\triangle ABC$ は，$\angle A$ を直角，$\angle ABC=\frac{\pi}{6},\angle BCA=\frac{\pi}{3}$ の直角三角形〃    	・等式から，どんなことが読みとることができるのか見当がつかない。 ・絶対値の性質を用いて変形したり，$\left\|\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right\|$ や $\arg\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ の値が求められなかったり，$\arg\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}$ は $\angle RPQ$ の大きさを表わすことに気付かなかったりして答へゆきつかない。 ・(2)では i で整理をする発想が思いつかず手がつかない。	・$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}$ が実数のとき，3点，P_0,P_1,P_2 は一直線上，純虚数のとき，直線 P_0P_1 と P_0P_2 は垂直であることをEX23で学習済である。また，EX24では偏角以外に絶対値に着目する手法も学んだ。この問題で生かしていく。絶対値から2辺の関係，偏角から一角の大きさを得る。 ・$\left\|\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right\|=\frac{\|z_2-z_1\|}{\|z_3-z_1\|},\left\|\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right\|$ $=\left\|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\|$ $=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=1,$ $\arg\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=\theta$ とおいて $\left\|\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right\|=1$ から $\cos=\frac{1}{2},$ $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 図示して $\theta=\frac{\pi}{3}$ 上記の点を確実に押さえて答を得る。 ・i で整理することにより，(1)と同様な形の式が見えてくる。(1)の形に変形し，(1)に準じた解法をとる。
EX26 次の問いに答えよ。 (1)複素数 z が単位円周を動くとき，$\|z-\sqrt{3}-i\|$ のとる値の範囲を求めよ。 (2)複素数 z が $\|z\|=1$ を満たすとき，$\|z-2\|^2+\|z+2\|^2$ の値を求めよ。 解 (1) $\|z-\sqrt{3}-i\|$ $=\|z-(\sqrt{3}+i)\|$ は点 z が A 点のとき最小，B 点のとき最大  (2) $\|z\pm2\|^2=(z\pm2)(\bar{z}\pm2)$ (複号同順)を利用して変形	・2点 z,w の距離 $\|z-w\|$ ・共役な複素数の性質 $\overline{\alpha\pm\beta}=\bar{\alpha}\pm\bar{\beta}$ (複号同順)，$\overline{\alpha\beta}=\bar{\alpha}\bar{\beta},\overline{(\frac{\alpha}{\beta})}=\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$ ・複素数の絶対値 $\|z\|\geqq0,\|z\|=0\Leftrightarrow z=0,\|z\|=\|-z\|=\|\bar{z}\|,\|z\|^2=z\bar{z}$ $\|z\pm2\|^2=(z\pm2)(\overline{z\pm2})=(z\pm2)(\bar{z}\pm\bar{2})=(z\pm2)(\bar{z}\pm2)$ (複号同順)	解 (1) $\|z-(\sqrt{3}+i)\|$ は2点 z と $\sqrt{3}+i$ の距離を表す。 $\|\sqrt{3}+1\|=\sqrt{3+1}=2$ 点 z は単位円上を動くから，$\|z-(\sqrt{3}+i)\|$ は点 $\sqrt{3}+i$ と原点 O を結ぶ直線上で，点 z が (i)点 A に一致するとき，最小値 $2-1=1$ (ii)点 B に一致するとき，最大値 $2+1=3$ それらの間の値をもれなくとるから よって $1\leqq\|z-\sqrt{3}-i\|=3$〃 (2)与式 $=(z-2)(\bar{z}-2)+(z+2)(\bar{z}+2)=z\bar{z}-2(z+\bar{z})+4+z\bar{z}+2(z+\bar{z})+4$ $=2z\bar{z}+8=2\|z\|^2+8=2\cdot1+8=10$〃 ($\because\|z\|=1$)  	・$\|z-\sqrt{3}-i\|$ の意味がとらえられない。 ・図示をしないで問題を解こうとすると大変である。 ・(2)では $\|z\|^2=z\cdot\bar{z}$ を用いて計算を進めることは慣れてきつつある。	・変形して $\|z-(\sqrt{3}+i)\|$ は2点 z と $\sqrt{3}+i$ の距離を表すことを確認する。 ・図示することによって単位円上の点 z は定点 $\sqrt{3}+1$ に最も近づく点が A，遠ざかる点が B，それぞれの点で $\|z-\sqrt{3}-i\|$ が最小，最大となることをとらえる。 ・$\|z\pm2\|^2=(z\pm2)(\bar{z}\pm2)$ (複号同順)を用いて同類項をまとめることによって値が簡単に求まる。
EX27 次の事柄を複素数を用いて証明せよ。 (1) $\triangle ABC$ の辺 BC の中点を M とすると $AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$ (2)四角形 $ABCD$ において等式 $AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$ ならば2つの対角線は垂直に交わる 解 原点の位置，頂点の表す複素数を適当に定める。 (1)両辺を複素数の絶対値を用いて表す。左辺を $z^2=z\bar{z}$ を用いて変形し右辺を導く。 (2) $A(0),B(z_1),C(z_2),D(z_3)$ とする。両辺を絶対値を用いて表す。$\|z\|^2=z\bar{z}$ を用いて変形する。直線 $AC\perp BD$ には $\frac{z_2}{z_1-z_3}$ は純虚数であることを示す。	・線分の長さの平方 絶対値の平方で表される。 ・計算を簡単にする工夫 原点の位置や頂点の表す複素数を適当に定めると，文字数を少なくしたり，計算を容易にすることができる。 ・複素数の絶対値 $z^2=z\bar{z}$ ・4点 $P_1(z_1),P_2(z_2),P_3(z_3),P_4(z_4)$ のとき(1) $P_1P_2/\!/P_3P_4\Leftrightarrow\frac{z_4-z_3}{z_2-z_1}$ は実数 (2) $P_1P_2\perp P_3P_4\Leftrightarrow\frac{z_4-z_3}{z_2-z_1}$ は純虚数 (1) $P_1P_2/\!/P_3P_4\Leftrightarrow\arg\frac{z_4-z_3}{z_2-z_1}=0$ または π $\Leftrightarrow\frac{z_4-z_3}{z_2-z_1}$ は実数 (2) $P_1P_2\perp P_3P_4\Leftrightarrow\arg\frac{z_4-z_3}{z_2-z_1}=\frac{\pi}{2}$ または $-\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\frac{z_4-z_3}{z_2-z_1}$ は純虚数 ・z は純虚数 $\Leftrightarrow z=-\bar{z}$ ・z は実数 $\Leftrightarrow z=\bar{z}$ ・共役な複素数の性質 $\overline{z\pm w}=\bar{z}\pm\bar{w}$ (複号同順)，$\overline{zw}=\bar{z}\bar{w},\overline{(\frac{z}{w})}=\frac{\bar{z}}{\bar{w}}$	解 (1) (証) M を原点にとり，$A(z_1)$ とする。B と C は原点 M に関して対称であるから $B(-z_2),C(z_2)$ とおける。 左辺 $=\|z_1+z_2\|^2+\|z_1-z_2\|^2$ $=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})+(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})$ $=z_1(\overline{z_1}+\overline{z_2})+z_2(\overline{z_1}+\overline{z_2})+z_1(\overline{z_1}-\overline{z_2})-z_2(\overline{z_1}-\overline{z_2})$ $=2(z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2})=2(\|z_1\|^2+\|z_2\|^2)$ $=2(AM^2+BM^2)=$ 右辺 (終) (2) (証) A を原点にとり，$B(z_1),C(z_2),D(z_3)$ とする。 仮定により $\|z_1\|^2+\|z_3-z_2\|^2=\|z_3\|^2+\|z_2-z_1\|^2$ ゆえに $z_1\overline{z_1}+(z_3-z_2)(\overline{z_3}-\overline{z_2})=z_3\overline{z_3}+(z_2-z_1)(\overline{z_2}-\overline{z_1})$ $z_2\overline{z_3}+\overline{z_2}z_3=z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2$ $\therefore z_2(\overline{z_1}-\overline{z_3})=-\overline{z_2}(z_1-z_3)$ よって $\frac{z_2}{z_1-z_3}=-\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}-\overline{z_3}}$ ゆえに $\frac{z_2}{z_1-z_3}=-\overline{\left(\frac{z_2}{z_2-z_3}\right)}$ となり $\frac{z_2}{z_1-z_3}$ は純虚数，したがって $AC\perp BD$ (終)   	・中点 M を原点に重ねてとることは「図形と方程式」で学んでいることであるから新しいことではない。したがって，原点の位置の定め方は難しいことではない。 ・(1)(2)とも $\|z\|^2=z\bar{z}$ を用いて変形して計算し，整理する中から示すことをはっきりできる。 ・$z_2,\overline{z_2}$ について整理することが思いつかない。 ・$\frac{z_2}{z_1-z_3}$ が純虚数であるための条件が使えないため結論を導くことができない。	・計算が容易になるように，中点 M を原点にとり、$C(z_2)$ をきめると，$B(-z_2)$ がきまり，$A(z_1)$ を定めるだけでよいから少ない文字で表される。 ・(1)は同類項をまとめるだけで右辺を導くことが可能であったが(2)は示すこと $\frac{z_2}{z_1-z_3}$ が純虚数に向かって計算を進めていく。 ・$z_2,\overline{z_2}$ の項が2項ずつある。$z_2,\overline{z_2}$ について整理すると $\frac{z_2}{z_1-z_3}$ の分母にあたる項が見えてくる。 ・$\frac{z_2}{z_1-z_3}$ が純虚数であるための必要十分条件は $\frac{z_2}{z_1-z_3}=-\overline{\left(\frac{z_2}{z_1-z_3}\right)}$ を用いて結論を導く。