

数学的分析を支援するWeb学習システムの開発

成瀬喜則*・早勢欣和**・山西潤一***

Development of the Web-Based Learning System for Mathematical Analysis

Yoshinori NARUSE, Yoshikazu HAYASE and Jun-ichi YAMANISHI

Abstract

Teachers are encouraged to use ICT for subjects or integrated studies. The digital library has been widely used in k-12 education in Japan. It is effective for students to analyze data mathematically using a system on the Web. The authors developed a system that enables students to analyze several data and find the existence of function.

1. はじめに

初等中等教育・高等教育では、情報教育（ICT）が教育の一つの重要な柱と位置づけられてきており、あらゆる教科の中でコンピュータやネットワークを利用し、ICTスキルを身につけることが要求されている。

そのような中で、デジタルコンテンツを教育の中で利用する動きが出てきた。デジタルコンテンツには、さまざまな情報が盛り込まれており、使い方によっていろいろな学習が可能になる。このようなコンテンツをどのような学習の場で利用するかは、教師の力量にも依存する。本論では、デジタルコンテンツを情報教育や数学教育の場で活用し、情報を科学的に分析する能力を育成することを考える。

さて、高等専門学校の低学年段階及び高等学校の数学教育ではいくつかの課題が存在する。その中の1つの大きな課題は、数学的な概念の一般化をはかるときに学習者が到達すべき目標を失ったり、その概念の意味を把握することが難しくなったりすることである。

関数やグラフの学習を例にとる。例えば、 $y = 4x + 1$ や $y = 2x^2 + 3x - 1$ など係数が具体的にわかっているような関数では、その関数の特徴を明確にしたり、グラフを描いたりすることを学習する。このとき、関数式を標準形に変形することによってグラフの形を知ることができ、頂点の座標などもある程度簡

単に指摘することができる。

しかし、2次関数の一般形である $y = ax^2 + bx + c$ の特徴を学習しようとするとき、 a, b, c の値が決まっていないために、このグラフがどのような形になるのかをイメージすることは学習者にとっては大変難しい。そこで、 a, b, c が具体的な数値をとりながら変化するときのグラフの形がわかると、2次関数の具体的なイメージを持つことができる。

特に高等専門学校の場合は、工学系の分野で数学を応用することが求められるため、数学を道具として利用できることが大切になる。どの場面でもどのような数学概念を適用するかを学習させるためには、多くの具体的な事例について学習させてイメージを持たせることが有効となる。

本論文では、データを分析して、関数の存在を認識するための支援システムをWeb上に構築し、その有効性について報告する。

2. 関数学習における学習内容の分類

関数を学習させる時に、目的に応じて2つの学習内容がある。

- (1) 関数式がわかっている場合に、その関数の性質を理解すること
- (2) 2つの数量間に関数が存在する時に、その関数式

を求めること

この2つの学習内容は相互に関連性を持っており、どちらか一方の学習だけでは、関数概念を把握したことにはならない。次に、これらの内容について、具体的にどのような学習指導が行われるかについて述べてみる。

2. 1 関数の性質の理解

数学の導入段階として、与えられた関数式から、その特徴を考えさせる場合が多い。まず、標準形の2次関数を学習する。 $y = ax^2$ を基準にして、それを平行移動・対称移動して得られる関数を取り上げる。2次関数は、頂点の座標と x^2 の係数の2種類の情報でグラフが決定する。すなわち、標準形 $y = a(x-p)^2+q$ の a, p, q の値でグラフの形が決まる。

標準形の2次関数を学習した後、 $y = ax^2+bx+c$ の学習を行う。一般形の2次関数が与えられた場合、これがどのようなグラフとなるのかを把握するために、標準形に変形する必要がある。すなわち、一般形のままで a, b, c が変化したときのグラフの概形をイメージすることは難しい。

2. 2 データからの関数式の予測

関数学習で最も難しいのが、データから関数の存在を見いだすことである。身の回りのデータや自然現象のデータの中に関数を見だし、コンピュータを使ってデータ情報を加工したり、数学を使って表現したりする作業を通して、学習者は数学の有用性を認識することができる。しかし、現状として、このような題材を見いだすことはそれほど容易なことではない。

さて、2変量データが与えられた場合には、それがどのような関係にあるのかを把握するために、学生が判断しないとイケないことが2つある。

(1)関数のタイプを見きわめる

1, 2年生までに学習する関数は、1次関数, 2次関数, 分数関数, 無理関数, 指数関数, 対数関数である。この関数の特徴をそれぞれ理解した上で、与えられたデータ間にどのような関数が存在するのかを判断しなければならない。

(2)関数式を求める

(1)で関数のタイプの予想がついた後、その関数式を求める必要がある。低学年段階では、近似法を気軽に利用することは難しいため、この学習方法の難しさが最も大きな課題である。

3. 情報教育との関連性

高等学校で開始される教科「情報」では、情報活用能力の育成を目指した教育が行われる。情報活用能力に関しては

- ①情報活用の実践力
- ②情報の科学的な理解
- ③情報社会に参画する態度

の3つが柱となっている。これらの能力は高度情報化社会に適応していくために必要な能力と位置づけられており、高等学校の教科「情報」の新学習指導要領が定められている[3]。

ここで、情報の科学的な理解を深めるために必要なことについて考えてみる。学習指導要領では、情報を分析するための手段の特性を理解したり、情報活用の評価・改善をしたりするために必要な理論を学習することの重要性が指摘されている。情報を収集して加工する時には、そのための手段をいくつか用意しておき、場合に応じて適当な手段を利用することができなければならない。その手段にはさまざまなものがあり、モデル化やシミュレーションはその手段の一つとなる。

モデル化やシミュレーションを行うためには、得られたデータからノイズを取り除き、本質的なデータだけをピックアップしたり、思考が容易になるように対象となる情報の簡略化を図ったりすることが必要である[5]。このような手法は、コンピュータやネットワークを利用することによって効果を上げることができるが、そのための基礎的な理論を学習させる必要が生じる。すなわち、情報の科学的な理解を深めるためには、ある程度の数学的な手法が必要となってくる。

数値化された情報の分析方法を学習させる時には、その情報を分析することによって何を明らかにしたいのかを考えさせる必要がある。学習者がデジタルコンテンツを与えられたとき、学習の目的によってその情報の見方が異なってくる。たとえば、川の映像を集めたデジタルコンテンツについて考えてみる[6]。川の石に着目した場合には、上流, 中流, 下流で石の形が違うことに気づかせ、その理由について考えさせる学習が存在する。映像という情報を見ることでこのような学習が可能となる。

さらに、この映像の持つ情報を数値化することによって別の学習が可能となる。たとえば、川の水が流れる映像から、川の幅を推測することが可能である。それは、映像にある他の物体、たとえば木の葉や建物などから、映っている川の幅を知ることができる。場合に

よっては、川の水の流れる速さも推測することができる。これらの数値的情報から、上流、中流、下流の水の量を測定し、年間の水量を予測するような学習も成立する。

また、物理実験のデジタルコンテンツを数学の学習として成立させることが可能である。例えば、定常波は三角関数の和で表されることが理論的にわかっている。そこで、実際の定常波の画像から、周期、波長などを推測したり、定常波の関数式を予測したりすることによって、三角関数の性質や諸公式について学習させることが可能である。その際、三角比の加法定理を利用することによって、定常波の変位を正弦で表現することが可能になるため、加法定理の有用性を認識させることができる。

また、その式から定常波について知ることのできる情報を指摘し、関数式の係数をどのように求めることができるのかを考えさせることによって、より深く三角関数について学習させることが可能となる。例えば、定常波においても少しも動かない点（節）があることや、節と節の間の点が最も振幅が大きいことをデジタル映像で把握することができる。これらの特徴が、得られた関数式から表現されているかどうかを考えさせる。このような学習を通して、関数が自然現象を表現する有効な手段であることに気づかせることができる。

このように、情報を数値することによって、より深い学習が可能となり、情報の科学的な分析能力を深めることができる。

4. 本システムの概要

4. 1 システム動作環境

学習システムは、HTMLファイルをWebブラウザで表示するだけで利用できる。HTMLファイルの記述には、SVG(Scalable Vector Graphics)とJavaScriptを用いているので、Webブラウザはこれらを解釈できる機能を有する必要がある[7]。

今回は、OSをWindows環境とし、JavaScriptを利用できるように設定したMicrosoft Internet ExplorerにAdobe SVG Viewerプラグインをインストールしたものをういて動作確認した[1]。

学習システムは、ネットワークを介したサーバー・クライアント構成でも、サーバを利用しないスタンドアロンでも利用できる(図1)。

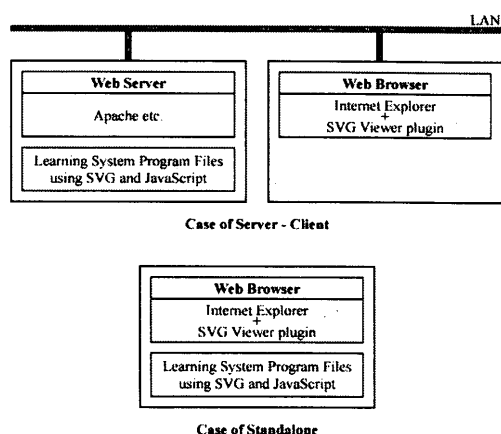


図1 システム構成図

4. 2 システム開発環境

本システムではWebブラウザにグラフなどの画像情報を描画する方法として、W3Cによって仕様が取り決められている、XMLベースの2Dベクトルグラフィックス形式であるSVGを用いた。

ベクトル情報に基づいて画像を描画することから、画像を拡大縮小してもスムーズなものが得られ、多くの画像ファイルのデータ形式であるビットマップ情報の場合に見られるギザが出ることがない(図2)。

SVGで用いられる座標系はx-y平面座標であるが、原点は描画領域の左上となり、横軸の右方向が+xで、縦軸の下方向が+yで表される。

SVGはプレーンテキストで記述されるので、使い慣れたテキストエディタ上で簡単に作成できる。また、レイアウト、フォント、色、印刷に対する精密なコントロールがテキストで記述するだけで可能となる。

例えば、

```
<svg>
  <circle cx="100" cy="100" r="50" fill="none"
    stroke="black" stroke-width="2"/>
</svg>
```

の内容のテキストファイルをsample.svgの名で作成し、これをWebブラウザで開くと、図3のようになる。SVGをWebブラウザで描画したとき、画像の適当な箇所でマウスの右ボタンをクリックすると、ズームインやズームアウトといったメニューを利用することが可能である。

学習システムでは、入力データの変更に応じてダイナミックに表示画像も変更するために、JavaScriptプログラムを用いて計算などを行い、その結果を反映させるためにSVGオブジェクトに対してJavaScriptを用いてDOMでアクセスし、属性値などを変更するといった手法を用いた。

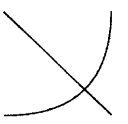

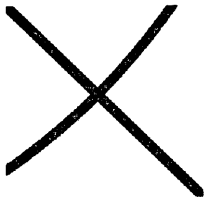
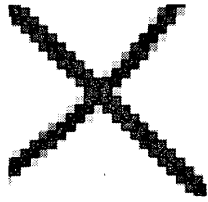
	SVG	Bitmap
Original		
Expansion		

図2 ベクトル画像(SVG)とビットマップ画像

本システムでは、データの描画のみを動的に行うようにしたが、JavaScriptで計算しながら、その経過を随時描画することを行うことで、アニメーション教材を作成することも容易にできる。なお、アニメーションに必要とされるJavaScriptのコードはすべて、SVGドキュメント自体の中で定義することができるので、どのWebページに対しても、アニメーション化された画像を容易に組み込むことができる。

5. 本システムを利用した授業展開

本節では、開発したシステムを授業でどのように利用することが可能であるかを考察する。図4,5,6にWeb上の画面を示す。これまでの考察から、次の手順で学習展開を図ることが望ましい。

- ① 具体的なデータを収集する。
- ② データ(数値)を入力して、座標軸上に表示する。
- ③ Web上に表示されたデータを見て、どのような関数が存在するかを考える。
- ④ 関数式の係数を決め、関数式を決定する。
- ⑤ 関数式から、データ間の関係について考察を深める。

まず、①では、どのような教材を提示するかが教師側のもっとも大きな課題である。これまでの実践で、日本全国の自動車保有台数に関する年度毎の変化、日本の総人口に関する年度毎の変化を題材に取り上げた。このデータは、経済白書に掲載され、公表されているものであり、比較的イメージを持ちやすいことがわかっている[2]。本システムでは2次関数や円の方程式を取り扱っているが、データとしては、いろいろな関数をイメージできるものが必要である。できれば正解があるわけではなく、複数の関数式で考察を深めることができるものが望ましい[4]。

②では、 (x,y) のデータを入力することによって、 $x-y$ 座標軸上に点をとることができる。本システムでは、Web上の座標軸上にデータを表す点をとることができる。③においては、できるだけ多くの関数の適用を考えさせたい。その際に、それぞれの関数の特徴を認識させることが必要となる。2次関数の場合は、頂点と x^2 の係数によって決まるが、特徴としては、関数が増加から減少、あるいは減少から増加にかわる点が存在すること、上に凸となる場合と下に凸になる場合があることなどがあり、これらを正確に学習させることが必要不可欠である。

さらに、④においては、2次関数の係数を入力することによって、 $x-y$ 座標軸上にグラフを表示する。その際、③で学習した事項をもとにして、2次関数の係数をどのような値にすればよりデータに近いグラフを表示させることができるかを考えさせる。やみくもに変数の値を入力しても正確なグラフを表示させることができないため、論理的な思考が要求される。

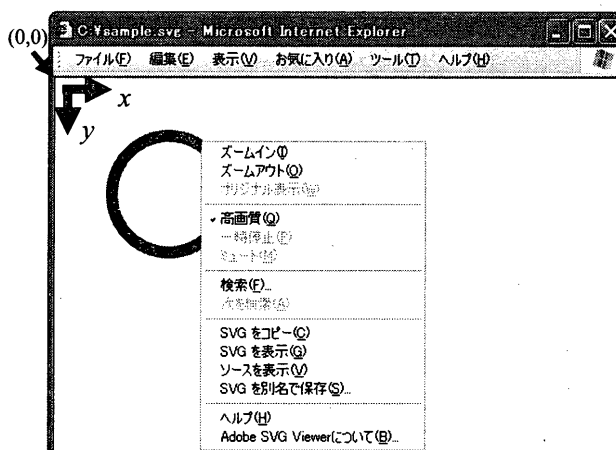


図3 WebブラウザにおけるSVG画像の例

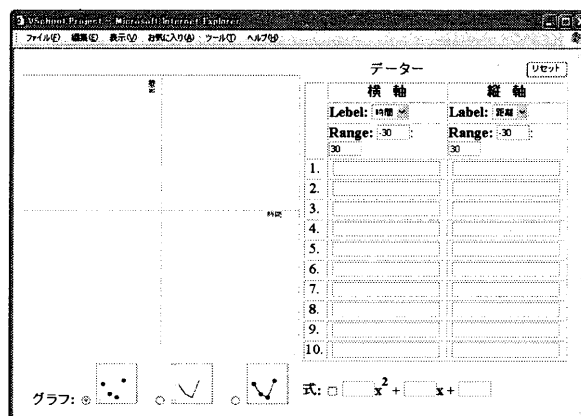


図4 Web上のデータ入力画面

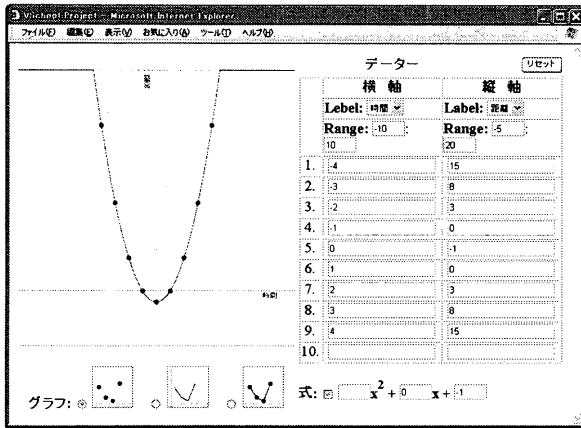


図5 座標軸上に表示された点と2次関数のグラフ

- [3] 文部省 (1999) 学習指導要領, 大蔵省印刷局, 東京
- [4] 成瀬喜則 (1995) 演習ツールを利用した微分方程式の指導, 論文集・高専教育, 18:38-45
- [5] 正司和彦 (2001) 「教育におけるモデリングとシミュレーション」, 岡本敏雄(編), インターネット時代の教育情報工学2, 森北出版, 東京
- [6] 富山デジタルコンテンツ活用教育推進協議会 (2003), 授業に活用できるデジタルコンテンツライブラリー,
<http://www.edc.toyama-u.ac.jp/~yama-lab/Digital/>
- [7] W3C (2003), Scalable Vector Graphics (SVG)
<http://www.w3.org/Graphics/SVG/Overview.htm>

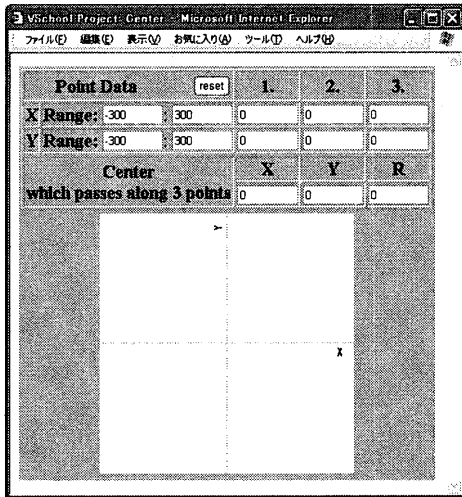


図6 円のグラフ表示を目的としたデータ入力画面

6. 最後に

本システムは、現在学内からアクセスすることによって利用することができる。本論で述べたように、デジタルコンテンツの使い方は一つではない。使用学年、使用目的によってさまざまな使用方法が可能である。逆に言えば、そのようなことを想定してコンテンツを開発していく必要がある。できるだけ汎用性の高いものを目指すことによって、使用する側からの反応も多くなり、次の開発の材料とすることができる。

参考文献及びURL

- [1] Adobe (2003), Scalable Vector Graphics
<http://www.adobe.co.jp/svg/main.html>
- [2] 経済企画庁 (2000) 平成12年度経済白書, 大蔵省印刷局, 東京