

コッククロフト・ウォルトン回路における 非線形状態方程式の漸化式表示*

亀田悦正^{*1}, 北本陽一^{*2}

Recurrence Formula Expression of Non Linear State Equation on Multistage Cockcroft-Walton Circuit

KAMEDA Etsumasa^{*1} and KITAMOTO Youichi^{*2}

On multistage Cockcroft-Walton Circuit, D.C. voltage of several thousands [V] is gotten conveniently from A.C. commercial electric power source. The output D.C. voltage increase in proportion to the small step number, but decrease over several large steps, by practical measurement. Therefore, recurrence formula expression is investigated.

Key Word: Recurrence Formula, State Equation, Cockcroft-Walton Circuit, Transient Voltage Wave Shape

1. はじめに

図-1 のコッククロフト・ウォルトン回路は、ダイオードとコンデンサを多段に組み合わせ、交流電圧を印加して交流成分を含む数千[V]の直流電圧を簡易的に発生することができる。実測から、低い段数では段数の増加に伴って直流出力電圧は増加するが、高い段数では段数の増加に伴って直流出力電圧が逆に減少する結果が得られる。この現象は各ダイオードに印加される電圧を状態量とし、ダイオードの非線形電圧電流特性を考慮して、各段の電位やコンデンサ電圧および各部の電流の波形について時間を追った数値解析によって確かめることができる。最高段数 n が奇数の場合と偶数の場合について、状態方程式の漸化式表示を検討した。

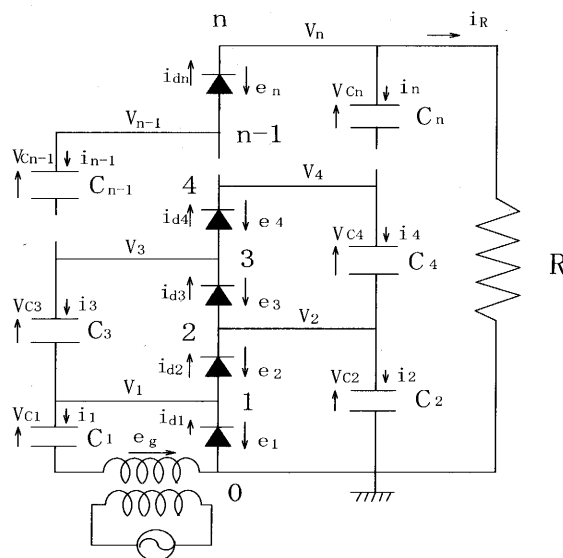


図-1 コッククロフト・ウォルトン回路

* 原稿受付 平成 18 年 1 月 10 日

*1 電気工学科 Department of Electrical Engineering

*2 専攻科 機械・電気システム工学専攻 研究生

Researcher, Mechanical and Electrical System Engineering Course, Advanced Engineering Faculty

2. 基本式

電圧源 $e_g(t)$, ダイオード電圧 $e_i(t)$ 及びコンデンサ電圧 $v_{ci}(t)$ の間に各段 $i=1, \dots, n$ について, (1)

式が成立する.

$$\begin{aligned} v_{c1}(t) &= e_g(t) - e_1(t), v_{c2}(t) = -\{e_1(t) + e_2(t)\}, \dots, \\ v_{ci}(t) &= -\{e_{i-1}(t) + e_i(t)\}, \dots, v_{cn}(t) = -\{e_{n-1}(t) + e_n(t)\} \end{aligned} \quad (1)$$

節点電位 $v_i(t)$ は, (2) 式で表わされる.

$$\begin{aligned} v_1(t) &= -e_g(t) + v_{c1}(t), v_2(t) = v_{c2}(t), \\ v_{2l-1}(t) &= v_{c2l-3}(t) + v_{c2l-1}(t), \\ v_{2l}(t) &= v_{c2l-2}(t) + v_{c2l}(t), \quad l = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2)$$

また, 変位電流 $i_{ci}(t)$, ダイオード電流 $i_{di}(t)$, 負荷電流 $i(t)$, 各節点の電流の間に, 以下の関係式が成立する. ただし, 負荷抵抗 R , 電荷素量 q , ボルツマン定数 k , 温度 $T[K]$ とする.

・変位電流:
$$i_{ci}(t) = C_i \frac{d}{dt} v_{ci}(t) \quad (3)$$

・ダイオード電流:
$$I_{di}(t) = I_{0i} \left\{ \exp\left(\frac{qe_i(t)}{n_i k T}\right) - 1 \right\} \quad (4)$$

・負荷電流:
$$i(t) = \{e_1(t) + e_2(t) + \dots + e_n(t)\} / R \quad (5)$$

・各節点の電流関係式:
$$\begin{cases} 0: i_{d1}(t) = i_{c1}(t) + i_{c2}(t) + i(t) \\ 1: i_{d2}(t) = i_{d3}(t) - i_{c1}(t) + i_{d1}(t) \\ \dots \\ i: i_{di+1}(t) = i_{di+2}(t) - i_{ci}(t) + i_{di}(t) \end{cases} \quad (6)$$

・最高段のダイオード電流:
$$i_{dn}(t) = i_{dn-1}(t) - i_{n-1}(t) = i_n(t) + i(t) \quad (7)$$

3. 非線形ダイオードを含む非線形状態方程式の漸化式

最高段数 n が奇数 $2L+1$ の場合の非線形状態方程式を (8) 式に示す.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e_k(t) &= (-1)^{k+1} \frac{d}{dt} e_g(t) - \left(\sum_{j=1}^k \frac{1}{C_j} \right) \sum_{i=k}^{2L+1} (-1)^{i+k} i_{di}(t) + \sum_{m=1}^{k-1} \left\{ (-1)^{m+1} \left(\sum_{j=1}^{k-m} \frac{1}{C_j} \right) i_{d(k-m)}(t) \right\} \\ &+ (-1)^{k+1} \left(\sum_{l=0}^{\frac{k-1}{2}} \frac{1}{C_{2l+1}} \right) i(t), \quad (k=1, \dots, n) \end{aligned} \quad (8)$$

また最高段数 n が偶数 $2L$ の場合の非線形状態方程式を (9) 式に示す.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e_k(t) &= (-1)^{k+1} \frac{d}{dt} e_g(t) - \left(\sum_{j=1}^k \frac{1}{C_j} \right) \sum_{i=k}^{2L} (-1)^{i+k} i_{di}(t) + \sum_{m=1}^{k-1} \left\{ (-1)^{m+1} \left(\sum_{j=1}^{k-m} \frac{1}{C_j} \right) i_{d(k-m)}(t) \right\} \\ &+ (-1)^k \left(\sum_{l=1}^{\frac{k}{2}} \frac{1}{C_{2l}} \right) i(t), \quad (k=1, \dots, n) \end{aligned} \quad (9)$$

4. ダイオードの非線形特性

(4)式は、 i 段目のダイオード電流 $I_{di}(t)$ とダイオード電圧 $e_i(t)$ の間に成立つ非線形電流・電圧特性を表わしている。

$$I_{di}(t) = I_{oi} \left\{ \exp\left(\frac{qe_i(t)}{n_i kT}\right) - 1 \right\} \quad (4)$$

ここで、パラメータとして、 I_{oi} : 飽和電流、 n_i : 立上係数の他に、電荷素量 q 、ボルツマン定数 k 、温度 $T[K]$ を用いている。

5. 数値解析例

段数 $n = 8$ の場合の数値解析例を以下に示す。 i 段目状態量の時間 $t + \Delta t$ におけるダイオード電圧 $e_i(t + \Delta t)$ は、(9)式の時間 t における $\frac{d}{dt}e_i(t)$ と時間幅 Δt の積を用いて(10)式から求められる。

$$e_i(t + \Delta t) = e_i(t) + \frac{d}{dt}e_i(t) \cdot \Delta t \quad (10)$$

(1)式に時間 $t + \Delta t$ における電圧源 $e_g(t + \Delta t)$ およびダイオード電圧 $e_i(t + \Delta t)$ を代入して、コンデンサ電圧 $v_{ci}(t + \Delta t)$ が求められる。更に、(2)式を用いて節点電位 $v_i(t + \Delta t)$ が求められる。

5-1. 各パラメータの値

数値解析で用いた各パラメータの値を表一1に示す。

表一1

電荷素量 q	$1.60217733 \times 10^{-19}$ [C]	角周波数 ω	376.9911184 [rad/sec]
ボルツマン定数 k	1.380662×10^{-23} [J/C·K]	周波数 f	60 [Hz]
温度 T	305 [K]	電圧源最大値 E_g	395.9797974 [V]
円周率 π	3.14159264 [rad]	ダイオード飽和電流 I_{oi}	1.5×10^{-9} [A]
指数係数 q/kT	38.04725868 [V ⁻¹]	ダイオード立上係数 n_i	2.99 [無次元]
静電容量 C_1, C_2	0.1 [μ F]	静電容量 C_5, C_6	0.1 [μ F]
静電容量 C_3, C_4	0.1 [μ F]	静電容量 C_7, C_8	0.1 [μ F]
負荷抵抗 R	4.7 [M Ω]	時間幅 Δt	$0.163398693 \times 10^{-6}$ [sec]

5-2. 解析結果

5-2-1. ダイオード電圧

図-2は、各段のダイオード電圧の初期値を $e_i(0) = 0$ ($i = 1 \sim 8$)とした場合のダイオード電圧 $e_i(t)$ の数値解析結果を示す。

図-2(a)は1段から4段までのダイオード電圧 $e_i(t)$ を、電圧源 $e_g(t)$ と併せて、時間 $t = 0 \sim 0.1$ [sec]の状態、即ち電圧源 $e_g(t)$ の波形6周期分について、初期の立上状態を示している。

ダイオード電圧 $e_i(t)$ は、負方向に掛かる電圧の絶対値が時間の経過につれて増大していることが読取れる。ダイオードの整流性のため順方向電圧は極めて小さく、対応するダイオード電流 $i_{di}(t)$ を図-3(a)に示す。

図-2(b)は、殆んど定常状態の時間 $t = 1 \sim 1.1$ [sec]における状態、即ち60～66周期分を示す。また1段 $e_1(t)$ ・3段 $e_3(t)$ グループと2段 $e_2(t)$ ・4段 $e_4(t)$ グループは逆方向に動いている。

図-2(c)と図-2(d)は5段から8段までのダイオード電圧 $e_i(t)$ について、図-2(a)と図-2(b)と同様な方法で示している。

1段から4段に比較すると、ダイオード電圧 $e_i(t)$ は、段数が大きくなるにつれて、時間的な遅れと共に、電圧の大きさが減少することを表わしている。

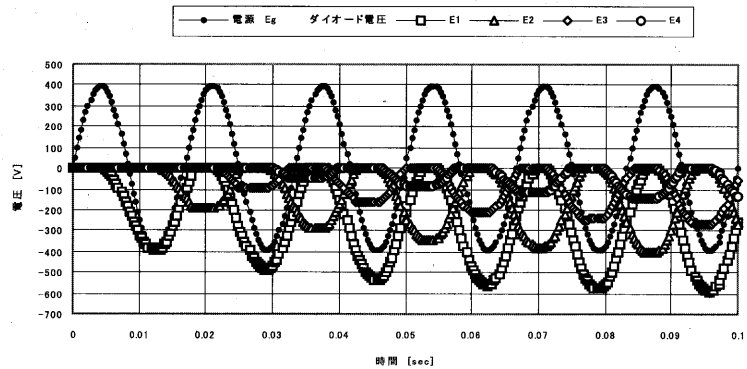


図-2(a) ダイオード電圧 $e_1(t), e_2(t), e_3(t), e_4(t)$: $t = 0 \sim 0.1$ [sec]

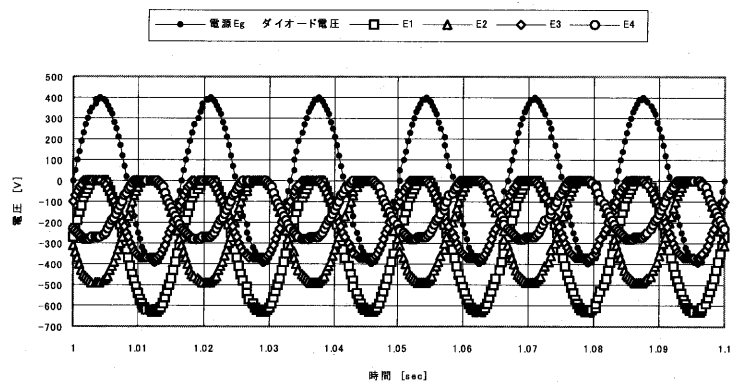


図-2(b) ダイオード電圧 $e_1(t), e_2(t), e_3(t), e_4(t)$: $t = 1.0 \sim 1.1$ [sec]

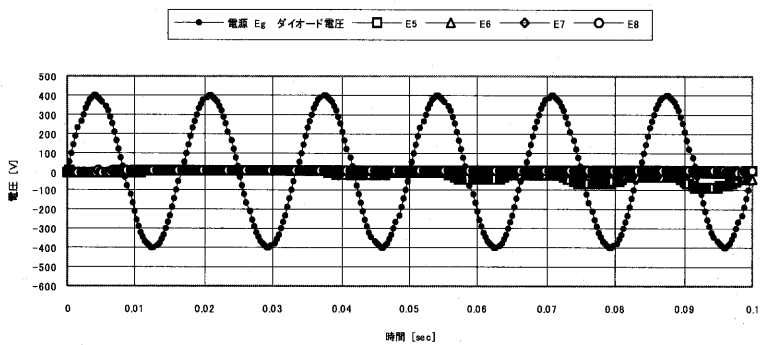


図-2(c) ダイオード電圧 $e_5(t), e_6(t), e_7(t), e_8(t)$: $t = 0 \sim 0.1$ [sec]

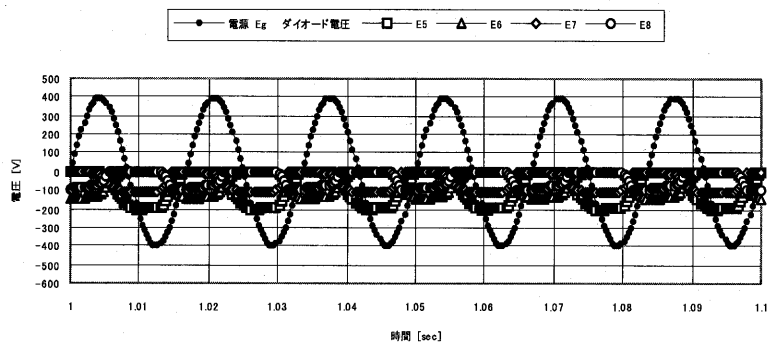


図-2(d) ダイオード電圧 $e_5(t), e_6(t), e_7(t), e_8(t)$: $t = 1.0 \sim 1.1$ [sec]

5-2-2. ダイオード電流

図-3は、同じ初期条件のダイオード電流 $i_{di}(t)$ の数値解析結果を示す。

図-3(a)は1段から4段までのダイオード電流 $i_{di}(t)$ に関して、時間 $t = 0 \sim 0.1$ [sec] の状態を示す。最初は、1段 $i_{d1}(t)$ から大きく流れ始めるが、2段、3段、4段へと、順次流れ、次第に定常状態に移っていくことを示している。

図-3(b)は、ほとんど定常状態の時間 $t = 1 \sim 1.1$ [sec] における状態、即ち60～66周期分を示す。また1段 $i_{d1}(t)$ の次に3段 $i_{d3}(t)$ が続き、少し遅れて2段 $i_{d2}(t)$ と4段 $i_{d4}(t)$ が流れる。

電流の大きさは、1段、2段、3段、4段と段数が大きくなるにつれて、次第に小さくなっている。

図-3(c)と図-3(d)は5段から8段までのダイオード電流 $i_{di}(t)$ について、図-3(a)と図-3(b)と同様な方法で示している。

1段から4段に比較すると、ダイオード電流 $i_{di}(t)$ は、流れ始める時間的な遅れと共に、電流の大きさも減少することを表わしている。

図-3(d)では、負荷電流 $i(t)$ も確認できる大きさを示している。

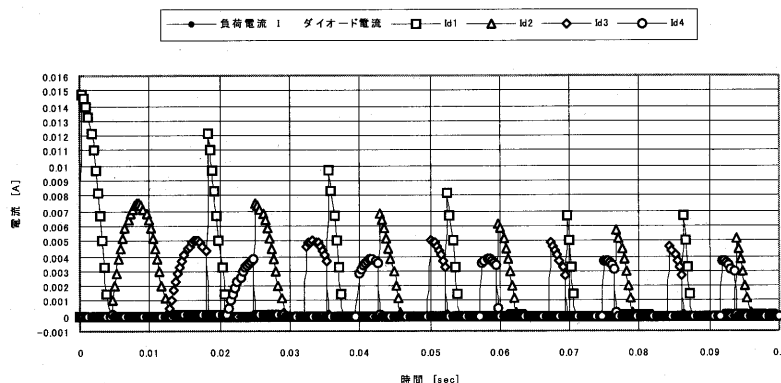


図-3 (a) ダイオード電流 $i_{d1}(t), i_{d2}(t), i_{d3}(t), i_{d4}(t) : t = 0 \sim 0.1$ [sec]

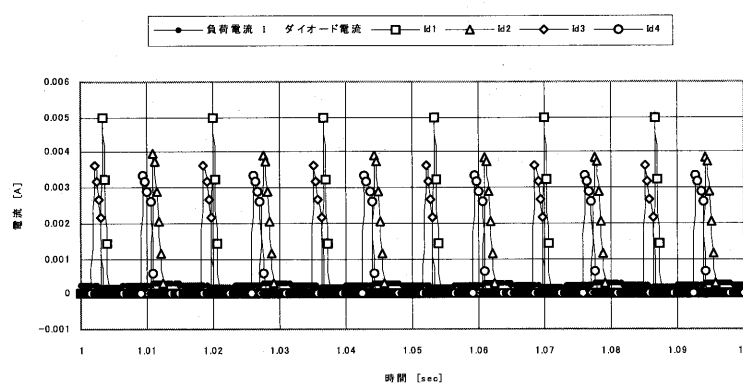


図-3 (b) ダイオード電流 $i_{d1}(t), i_{d2}(t), i_{d3}(t), i_{d4}(t) : t = 1.0 \sim 1.1$ [sec]

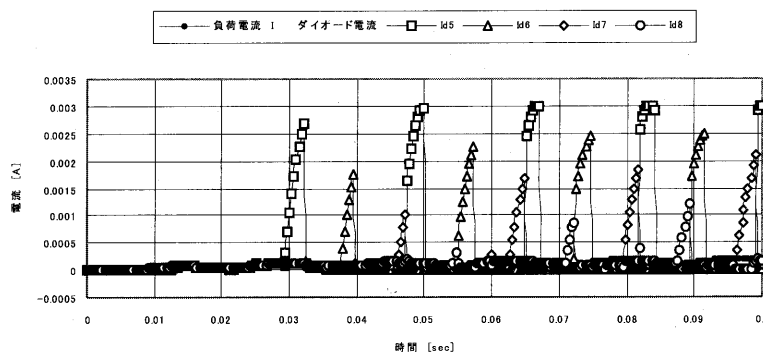


図-3 (c) ダイオード電流 $i_{d5}(t), i_{d6}(t), i_{d7}(t), i_{d8}(t) : t = 0 \sim 0.1$ [sec]

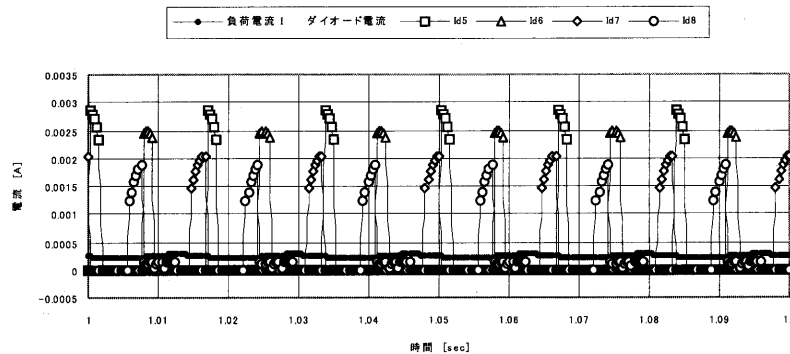


図-3 (d) ダイオード電流 $i_{d5}(t), i_{d6}(t), i_{d7}(t), i_{d8}(t) : t = 1.0 \sim 1.1$ [sec]

5-2-3. コンデンサ電圧

図-4は、同じ初期条件のコンデンサ電圧 $v_{ci}(t)$ の数値解析結果を示す。

図-4(a)は1段から4段までのコンデンサ電圧 $v_{ci}(t)$ を、時間 $t = 0 \sim 0.1$ [sec] の状態、即ち電圧源 $e_g(t)$ の波形6周期分について、初期の立上状態を、電圧源 $e_g(t)$ と併せて示している。

時間の経過と共に、コンデンサ電圧 $v_{ci}(t)$ が増大する状態を表わしている。段数が大きくなるにつれて、コンデンサ電圧の大きさは次第に小さくなっている。

図-4(c)と図-4(d)は5段から8段までのコンデンサ電圧 $v_{ci}(t)$ について、図-4(a)と図-4(b)と同様な方法で示している。

1段から4段に比較すると、コンデンサ電圧 $v_{ci}(t)$ は、段数が大きくなるにつれて、時間的な遅れと共に、電圧の大きさが減少することを表わしている。

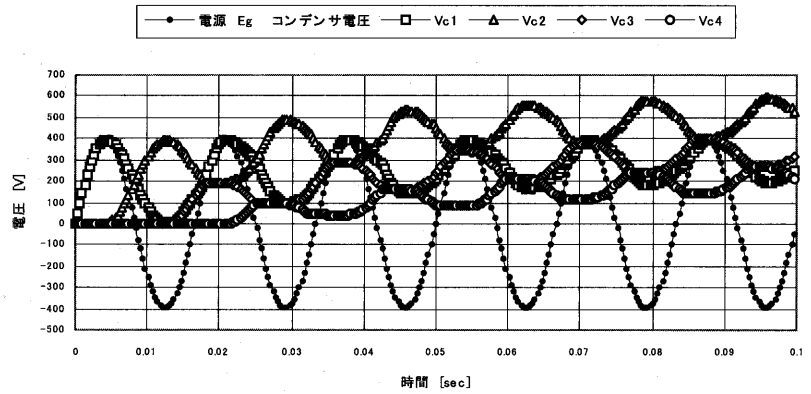


図-4 (a) コンデンサ電圧 $v_{c1}(t), v_{c2}(t), v_{c3}(t), v_{c4}(t) : t = 0 \sim 0.1$ [sec]

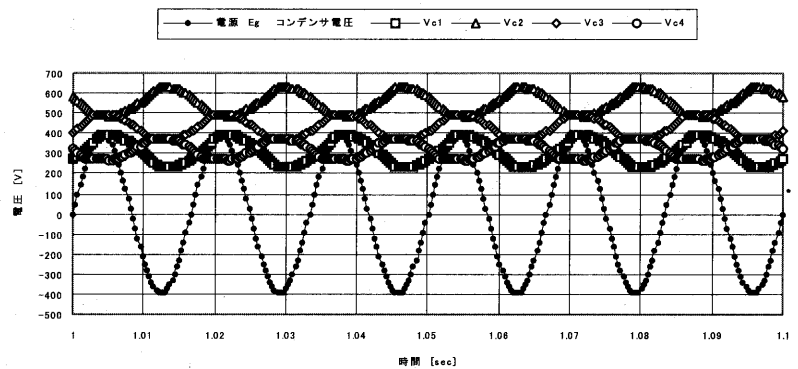


図-4 (b) コンデンサ電圧 $v_{c1}(t), v_{c2}(t), v_{c3}(t), v_{c4}(t) : t = 1.0 \sim 1.1$ [sec]

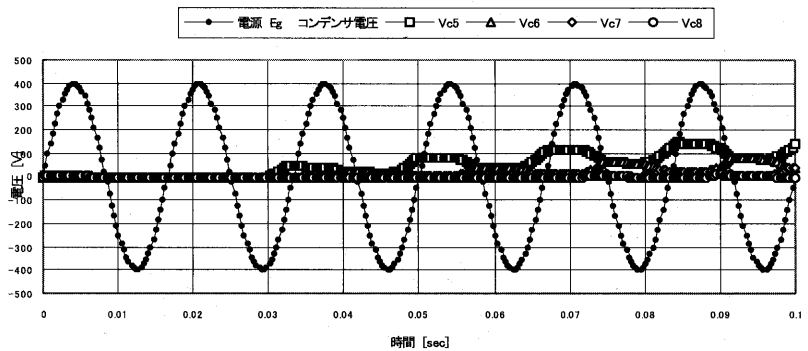


図-4 (c) コンデンサ電圧 $v_{c5}(t), v_{c6}(t), v_{c7}(t), v_{c8}(t) : t = 0 \sim 0.1$ [sec]

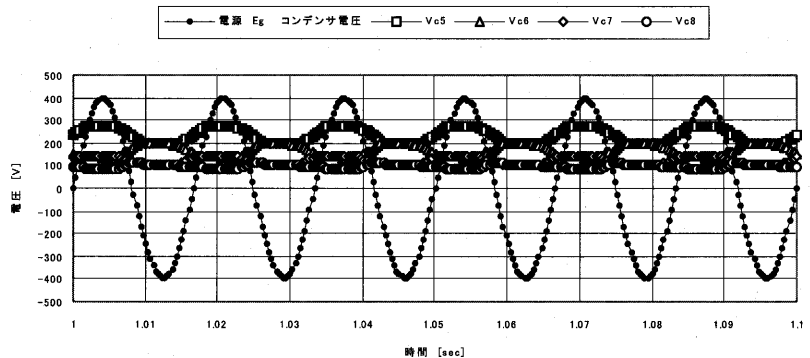


図-4 (d) コンデンサ電圧 $v_{c5}(t), v_{c6}(t), v_{c7}(t), v_{c8}(t) : t = 1.0 \sim 1.1$ [sec]

5-2-4. コンデンサ電流

図-5は、同じ初期条件のコンデンサ電流 $i_{ci}(t)$ の数値解析結果を示す。

図-5(a)は1段から4段までのコンデンサ電流 $i_{ci}(t)$ について、時間 $t = 0 \sim 0.1$ [sec] の状態を示している。

最初は、1段のコンデンサ電流 $i_{c1}(t)$ から大きく流れ始めるが、2段、3段、4段へと、順次流れて、次第に定常状態に移っていくことを示している。

図-5(b)は、ほとんど定常状態の時間 $t = 1 \sim 1.1$ [sec] における状態、即ち60～66周期分を示す。

1段の $i_{c1}(t)$ が逆方向に流れると同時に2段の $i_{c2}(t)$ は殆んど同じ大きさかつ少し小さめの振幅で正方向電流が流れる。

また2段 $i_{c2}(t)$ が逆方向に流れると同時に3段の $i_{c3}(t)$ は正方向に流れる。

更に3段の $i_{c3}(t)$ が逆方向に流れると4段の $i_{c4}(t)$ は正方向に流れる。

1段から4段に続いて、図-5(c)と図-5(d)は5段から8段までのコンデンサ電流 $i_{ci}(t)$ について、図-5(a)と図-5(b)と同様な方法で示している。

1段から4段に比較すると、コンデンサ電流 $i_{ci}(t)$ は、流れ始める時間的な遅れと共に、電流の大きさも減少することを表わしている。

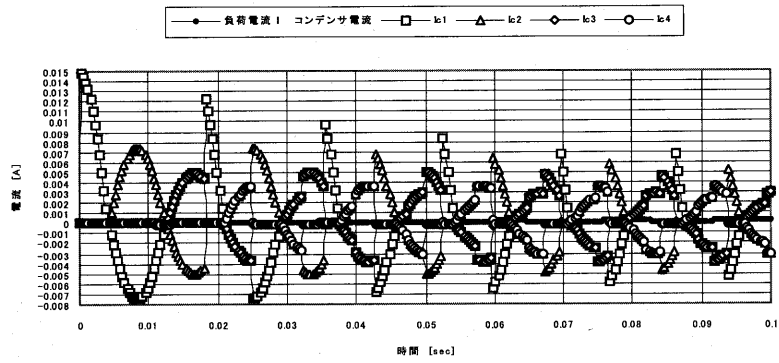


図-5 (a) コンデンサ電流 $i_{c1}(t), i_{c2}(t), i_{c3}(t), i_{c4}(t) : t = 0 \sim 0.1$ [sec]

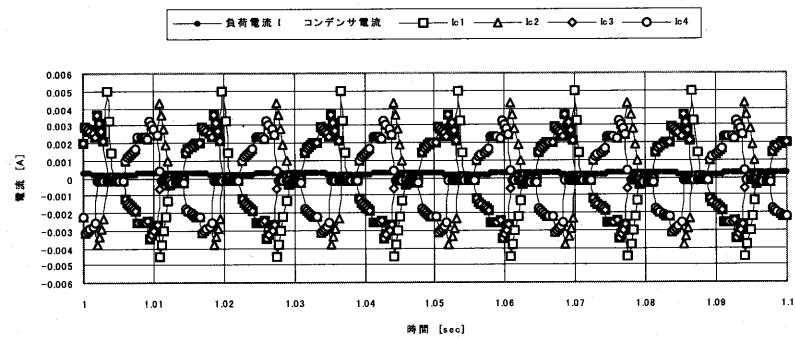


図-5 (b) コンデンサ電流 $i_{c1}(t), i_{c2}(t), i_{c3}(t), i_{c4}(t) : t = 1.0 \sim 1.1$ [sec]

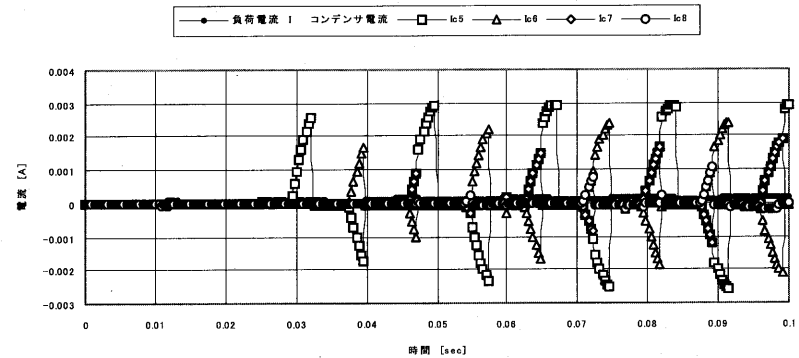


図-5 (c) コンデンサ電流 $i_{c5}(t), i_{c6}(t), i_{c7}(t), i_{c8}(t) : t = 0 \sim 0.1$ [sec]

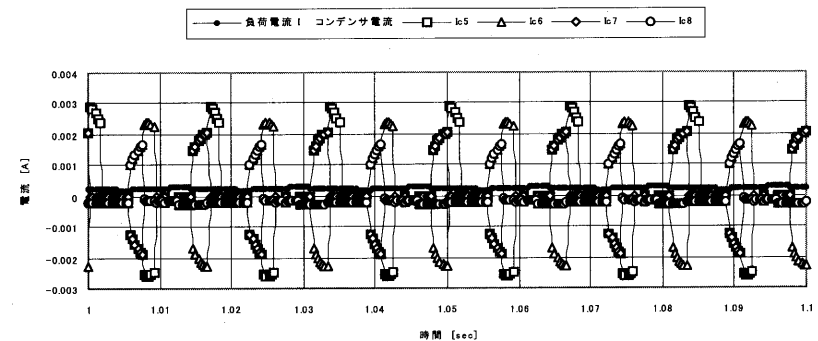


図-5 (d) コンデンサ電流 $i_{c5}(t), i_{c6}(t), i_{c7}(t), i_{c8}(t) : t = 1.0 \sim 1.1$ [sec]

5-2-5. 節点電位

図-6は、同じ初期条件の節点電位 $v_i(t)$ の数値解析結果を示す。

図-6(a)は1段から4段までの節点電位 $v_i(t)$ について、時間 $t = 0 \sim 0.1$ [sec]、即ち電圧源 $e_g(t)$ の波形6周期分について、初期の立上状態を、電圧源 $e_g(t)$ と併せて示している。

時間の経過と共に、節点電位 $v_i(t)$ が増大する状態を表わしている。節点電位 $v_1(t)$ 、 $v_2(t)$ の最大値がおよそ一致し、節点電位 $v_3(t)$ 、 $v_4(t)$ の最大値もおよそ一致している。

1段から4段に続いて、図-6(c)と図-6(d)は、5段から8段までの節点電位 $v_i(t)$ について、図-6(a)と図-6(b)と同様な方法で示している。

1段から4段に比較すると、節点電位 $v_i(t)$ は、段数が大きくなるにつれて、時間的な遅れと共に、電圧の大きさが飽和することを表わしている。

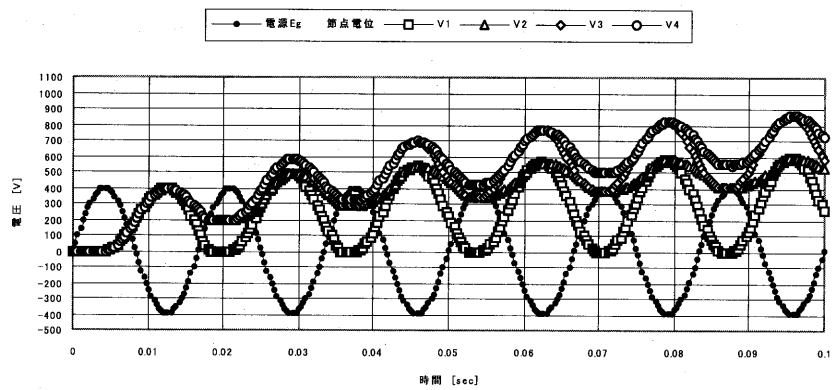


図-6(a) 節点電位 $v_1(t)$ 、 $v_2(t)$ 、 $v_3(t)$ 、 $v_4(t)$: $t = 0 \sim 0.1$ [sec]

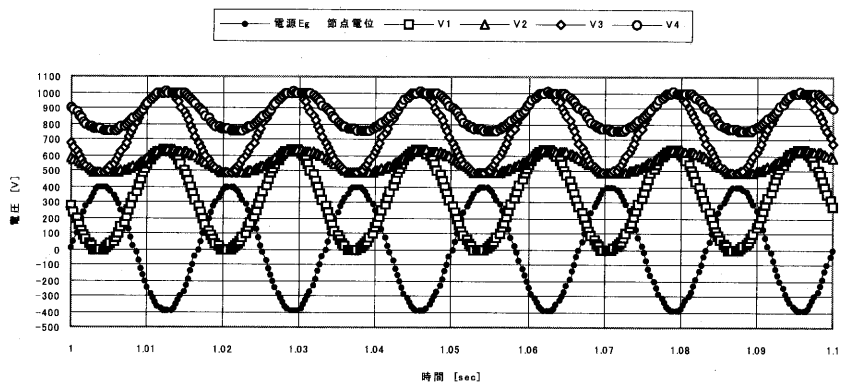


図-6(b) 節点電位 $v_1(t)$ 、 $v_2(t)$ 、 $v_3(t)$ 、 $v_4(t)$: $t = 1.0 \sim 1.1$ [sec]

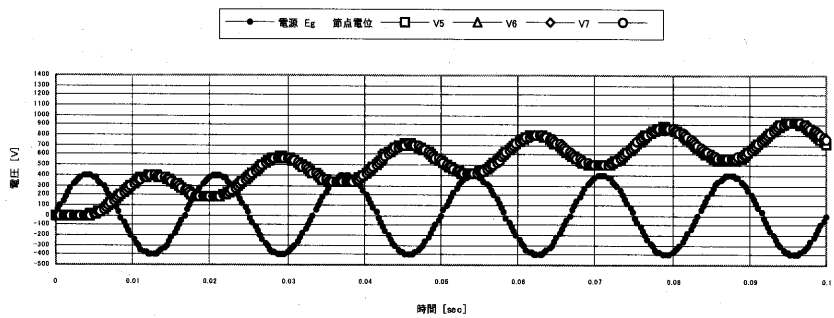


図-6(c) 節点電位 $v_5(t)$ 、 $v_6(t)$ 、 $v_7(t)$ 、 $v_8(t)$: $t = 0 \sim 0.1$ [sec]

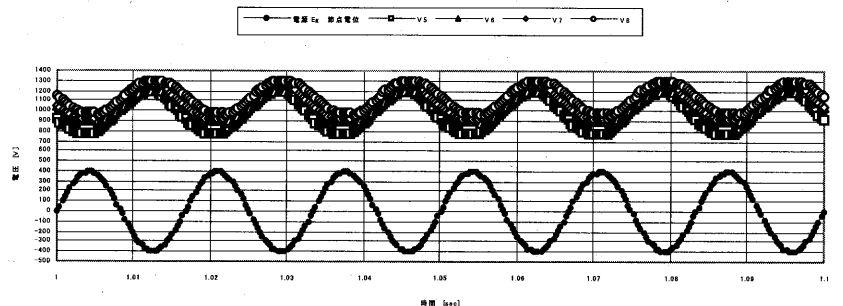


図-6(d) 節点電位 $v_5(t)$ 、 $v_6(t)$ 、 $v_7(t)$ 、 $v_8(t)$: $t = 1.0 \sim 1.1$ [sec]

6. 段数増加に伴う直流出力電圧の減少

前節で段数 $n = 8$ の場合, 節点電位の段数依存性は飽和的傾向を示した. 実測結果を検証する目的で, 前節と同じ条件で段数のみを $n = 12$ にして数値解析した場合の節点電位を図-7 に示す.

段数5の節点電位 $v_5(t)$ と段数6の節点電位 $v_6(t)$ は時間1.279 [sec]で極めて接近していると同時に, 段数7~12の電位 $v_7(t), v_8(t), v_9(t), v_{10}(t), v_{11}(t), v_{12}(t)$ は, 段数の増加に伴って直流出力電圧が減少傾向を示している.

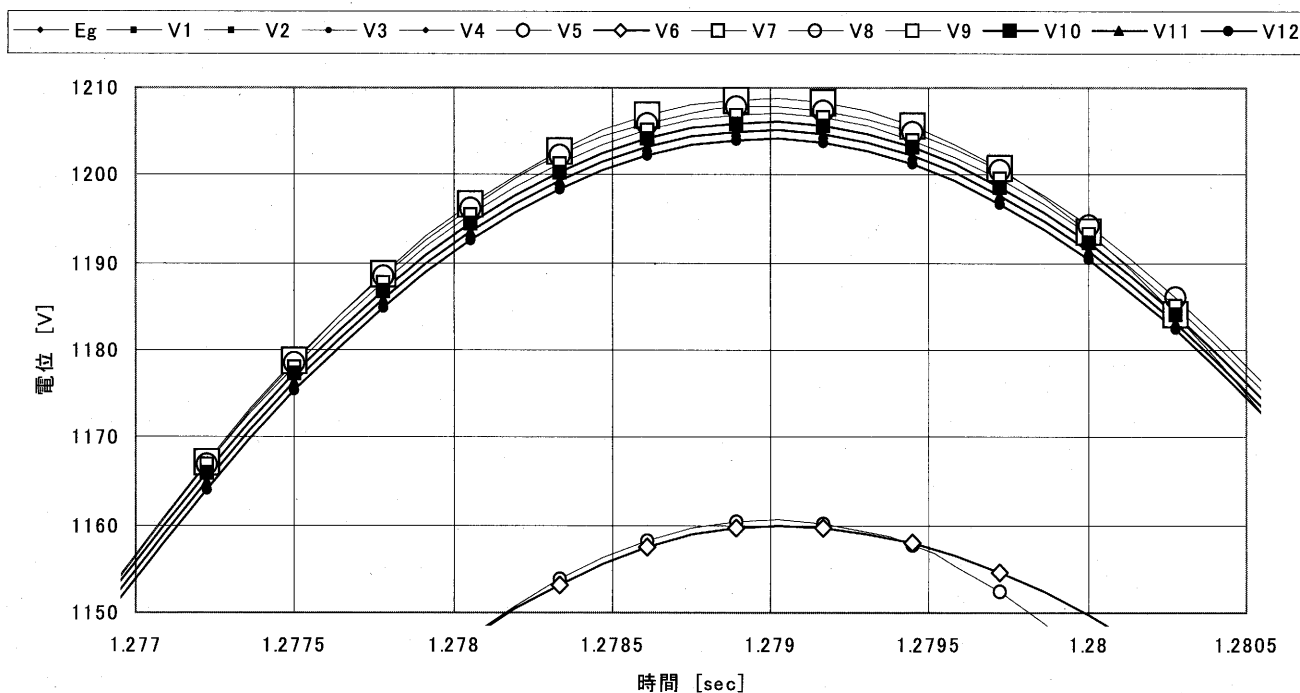


図-7 直流出力電圧の減少例：12 段回路の節点電位 $v_{p5}, v_{p6}, v_{p7}, v_{p8}, v_{p9}, v_{p10}, v_{p11}, v_{p12}$

7. まとめ

コッククロフト・ウォルトン回路は, 簡易的に高電圧直流電圧を発生することができるが, 多少の交流成分を含む回路である. 交流成分を含まない高電圧直流電圧を必要とする場合は, 交流成分を消去する工夫が必要であり, 今後の課題としたい. また, 単に段数を増加すればするほど高電圧を得るとは限らないので, 目的に合った高電圧直流出力電圧を得るように, 回路定数や段数を決定する必要がある. このような目的に, 今回誘導した非線形状態方程式の漸化式表示や数値解析の手法は有用である.

8. 参考文献

- (1) J. D. Cockcroft and E. T. S. Walton, "Experiments with High Velocity Positive Ions", Proc. Roy. Soc., A., vol.136, p.619, 1932.
- (2) 北本陽一, "コッククロフト・ウォルトン回路における非線形特性を考慮した直流出力電圧の段数依存性解析", 平成 16 年度特別研究論文集, ME04, 2005.
- (3) 亀田悦正・北本陽一, "コッククロフト・ウォルトン回路における非線形状態方程式の漸化式表示", H17 年度電気関係学会北陸支部連合大会, B-1, 2005.9.25
- (4) 長嶋秀世, 1984, "数値計算法", 槇書店
- (5) 美多勉・原辰次・近藤良, "基礎デジタル制御", コロナ社