モノポールとホップ束

山腰　等 *

Monopole and Hopf bundle

YAMAKOSHI Hitoshi

We study the topological meaning of magnetic monopoles in the quantum theory. We show that multiply charged monopole bundle can be generalized hopf bundle. The relationship between the monopole charge and hopf invariant is investigated.

キーワード: モノポール、ファイバー束、ホップ写像、ゲージ理論

1 はじめに

通常の電磁気学では、電荷から電場 $\boldsymbol{E}$ が発生し、電荷が運動するとその周りに磁場 $\boldsymbol{B}$ ができるが、磁場 $\boldsymbol{B}$ の発散は 0 である。円電流を考えればその周りにできる電場はちょうど磁石と同じになって N 極と S 極が両方あるようなものである。通常の電磁気学では磁気単極子（以下モノポールと呼ぶ）は存在しないことになっている。　しかしながら、1931 年にディラックは自然界は電気と磁気に対して対称であるという信念でモノポールを導入した。その際、量子論と矛盾を起こさないようにするためにはモノポールの磁荷の強さがある条件を満たさないといけないことを示した [(1)]。少し具体的にいえば、モノポールの磁荷がある数の整数倍にならなければならないという条件である。また、電磁場の理論を電磁ポテンシャルで表すと、モノポールを導くポテンシャルはモノポールの位置から空間の無限遠までのびる特異点を持をもたなければならなくなる。後にウーとヤンはファイバー束の言葉を使うことでこの特異点を回避した。[(2)]。

ディラックがモノポールに取り組んでいたちょうど同じ頃、数学者のホップは 2 次元球面 S^2 上のファイバーが円 S^1 になっている自明でないファイバー束を発見した [(3)]。そのファイバー束全体は 3 次元球面 S^3 になり、別の言葉で言えばホップは S^3 から S^2 への非自明な写像（ホップ写像）を見つけたのである。その写像は整数 (ホップ不変量) で区別され、ある幾何学的な意味を持っている。

程なくホップ不変量 1 のファイバー束 (ホップ束) は磁荷が 1 のモノポールの理論そのものであるということが分かった。しかし、ホップ不変量 2 がモノポール磁荷 2 には対応していない。本稿は、磁荷が 2 以上のモノポールを記述するファイバー束がどのようなものであるか、ホップ束とどのように異なっているか、あるいは似ているかについて考察する。

2 モノポールの理論

原点に磁荷 g のモノポールがあるとすると磁場 $\boldsymbol{B}$ は、

$$\boldsymbol{B} = \frac{g}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \quad \hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}/r \tag{1}$$

となる。従ってその発散は

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 4\pi g\delta(\mathrm{r}) \tag{2}$$

となるはずである。div rot $\equiv 0$ なので、$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ となるベクトルポテンシャル (以下モノポール場と呼ぶ) はどこかに特異点を持たなければならない。式 (1) となる $\boldsymbol{A^N}$ はたとえば、

$$A^N{}_x = \frac{-gy}{r(r+z)}, \quad A^N{}_y = \frac{gx}{r(r+z)}, \quad A^N{}_z = 0 \tag{3}$$

ととることができる。このとき $\boldsymbol{A^N}$ の特異点は z 軸の負の部分にある。あるいは次の $\boldsymbol{A^S}$ でも同じ $\boldsymbol{B}$ になる。

$$A^S{}_x = \frac{gy}{r(r-z)}, \quad A^S{}_y = \frac{-gx}{r(r-z)}, \quad A^S{}_z = 0 \tag{4}$$

このときの特異点は z 軸の正の部分である。この $\boldsymbol{A^N}$ と $\boldsymbol{A^S}$ は次のゲージ変換で結ばれている。

$$\boldsymbol{A^N} = \boldsymbol{A^S} - \mathrm{grad}\chi, \quad \chi = 2g\tan^{-1}\frac{y}{x} = 2g\phi \tag{5}$$

* 一般科目

ここで ϕ は z 軸のまわりの回転角である。

モノポールを量子論で扱う場合、粒子の Schrödinger 方程式

$$\frac{1}{2m}(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})\psi(\boldsymbol{r})=E\psi(\boldsymbol{r}) \tag{6}$$

の中にはベクトルポテンシャルが入るので特異点が問題になる。ゲージ変換 $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}+\mathrm{grad}\Lambda$ によって、波動関数は $\psi\to\exp(ie\Lambda/\hbar)\psi$ に変わるので、今の場合、

$$\psi'(\boldsymbol{r})=\exp\left(\frac{-2ieg\phi}{\hbar}\right)\psi(\boldsymbol{r}) \tag{7}$$

となる。波動関数が z 軸のまわりを一周して元の点に戻ったとき一価であるためには

$$\frac{2eg}{\hbar}=n\quad n\text{は整数} \tag{8}$$

を満たさなければならない。これがディラックの量子化条件である [2]。

3 モノポール束

電磁場の理論は数学の微分形式を使えばすっきり表すことができる。モノポールがある場合モノポール場に特異点があり、全空間で定義できなかったが、空間をいくつかに分けてその間をゲージ変換で移るようにすれば、特異点は陽にはあらわれない。そのかわり空間をいくつかに分けなければならなくなり、空間自体のトポロジーが問題になる。これは、数学的には、ファイバー束の理論で表され、ベクトルポテンシャルはそのファイバー束の接続で、ゲージ変換は座標変換に対応することができる。モノポール場を接続とみる理論は非自明なファイバー束のもっとも簡単な例になっている。

モノポールが原点にあるとすると、原点から放射状に磁場が出ている。原点はもちろん特異であるがそれをのぞいた空間は本質的には原点を囲む 2 次元球面 S^2 と考えてよい。つまり、ファイバー束の底空間は S^2 である。理論はゲージ変換 (5) で不変であるので、ファイバーはその自由度の空間、$U(1)=S^1$ である。底空間 S^2 を南極を含まない半球 U_N と北極を含まない半球 U_S とに分ける。重なっているところ $U_N\cap U_S$ は赤道である。S^2 の極座標 (θ,ϕ)、$0\le\theta<\pi,\ 0\le\varphi<2\pi$ をつかうとモノポール場は

$$\boldsymbol{A^N}=i\frac{1}{2}g(1-\cos\theta)d\phi\quad\text{on}\quad U_N\subseteq S^2, \tag{9}$$

と

$$\boldsymbol{A^S}=-i\frac{1}{2}g(1+\cos\theta)d\phi\quad\text{on}\quad U_S\subseteq S^2, \tag{10}$$

である(ここで元のゲージ場に i を掛けて純虚数にしてある)。ゲージ変換は変換関数 $g_{NS}(\varphi)=\exp[i\varphi(\phi)]$ をつかって、

$$\boldsymbol{A^N}=g^{-1}{}_{NS}\boldsymbol{A^S}g_{NS}+g^{-1}{}_{NS}dg_{NS}=\boldsymbol{A^S}+id\varphi \tag{11}$$

であるから、

$$g_{NS}(\phi)=\exp\left(\frac{2ieg\phi}{\hbar}\right) \tag{12}$$

となる。この変換関数は一価でなければならないから、

$$\frac{2eg}{\hbar}=n\quad n\text{は整数} \tag{13}$$

となり、ディラックの量子化条件が再び導かれる。

4 ホップ束

ディラックの量子化条件にあらわれる整数 n をモノポールの磁荷と呼ぶことにする。$n=0$ の場合はファイバー束は自明な束 $S^2\times S^1$ になる。$n=1$ のときは、有名なホップ束で全空間は S^3 になっている。その対応を簡単に復習する [5]。

ファイバー S^1、底空間 S^2、全空間 S^3 を複素数をつかって次のように表す。

$$\begin{aligned}S^1&=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|^2=1\}\\S^2&=\{(x,z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{C}\mid x^2+|z|^2=1\}\\S^3&=\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2\mid |z_1|^2+|z_2|^2=1\}\end{aligned}$$

射影 $p:S^3\to S^2$ を

$$p(z_1,z_2)=(2|z_1|^2-1,2z_1\bar{z}_2) \tag{14}$$

で定義する。S^2 の開部分集合を

$$\begin{aligned}U_N&=S^2-\{(-1,0)\}\\U_S&=S^2-\{(1,0)\}\end{aligned}$$

とおいて、局所自明化写像

$$\begin{aligned}\psi_N&:p^{-1}(U_N)\to U_N\times S^1\\\psi_S&:p^{-1}(U_S)\to U_S\times S^1\end{aligned}$$

を次で与える。

$$\begin{aligned}\psi_N(z_1,z_2)&=\left(2|z_1|^2-1,2z_1\bar{z}_2,\frac{z_1}{|z_1|}\right)\\\psi_S(z_1,z_2)&=\left(2|z_1|^2-1,2z_1\bar{z}_2,\frac{z_2}{|z_2|}\right)\end{aligned}$$

ψ_N と ψ_S の逆写像は

$$\psi_N^{-1}(x,z,w) = \left(w\sqrt{\frac{1+x}{2}}, \frac{zw}{2\sqrt{\frac{1+x}{2}}}\right) = (z_1,z_2)\cdot\left(w\frac{|z_1|}{z_1}\right)$$

$$\psi_S^{-1}(x,z,w) = \left(\frac{zw}{2\sqrt{\frac{1-x}{2}}}, w\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right) = (z_1,z_2)\cdot\left(w\frac{|z_2|}{z_2}\right)$$

となるので

$$\psi_S\circ\psi_N^{-1} : (U_N\cap U_S)\times S^1 \to (U_N\cap U_S)\times S^1 \quad (15)$$

は

$$\psi_S\circ\psi_N^{-1}(x,z,w) = \left(x, z, \frac{z}{|z|}w\right) \quad (16)$$

で与えられる。従って変換関数 g_{NS} は

$$g_{NS} = \frac{z}{|z|} = \frac{z_1/|z_1|}{z_2/|z_2|} \quad (17)$$

となる。S^3 の座標 (z_1,z_2) を極座標で $z_1 = r_1\exp i\xi_1$、$z_2 = r_2\exp i\xi_2$ とすると $r_1^2+r_2^2=1$ となる。そこで $r_1=\cos(\theta/2)$、$r_2=\sin(\theta/2)$ とおけば、S^3 は

$$S^3 = \left\{\left(\cos\frac{\theta}{2}e^{i\xi_1}, \sin\frac{\theta}{2}e^{i\xi_2}\right) \;:\; 0\le\frac{\theta}{2}\le\frac{\pi}{2}\right\} \quad (18)$$

とおける。この表示を使うと、射影 (14) は、

$$p(z_1,z_2) = p(\theta,\xi_1,\xi_2) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$$

となる。ここで $\xi_1-\xi_2=\phi$ とおいた。この (θ,ϕ) は S^2 の極座標になっている。これを使えば変換関数 g_{NS} は

$$g_{NS}(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) = e^{i\phi} \quad (19)$$

となる。これと、モノポール束の変換関数 (12) に量子化条件 (13) を入れたものを比べれば、ホップ束の変換関数は $n=1$ のモノポール束の変換関数と一致することが分かる。

次にホップ束の接続を求める。$\mathbb{C}^2$ の座標 (z_1,z_2) から、S^2 を複素射影空間 $\mathbb{C}P^1$ とみなしたときの同時座標 $[z_1,z_2]=[1,z_2/z_1]=[1,z]$ を決める。これから、ホップ束の単位切断 $\boldsymbol{e}_N(z)$ を

$$\boldsymbol{e}_N(z) = \frac{(1,z)^T}{(1+|z|^2)^{1/2}} \quad (20)$$

とする。$\mathbb{C}^2$ のエルミート計量を

$$\langle(a,b)^T,(c,d)^T\rangle = \bar{a}c+\bar{b}d$$

として、接続 ω_N を

$$\omega_N = \langle\boldsymbol{e}_N(z), d\boldsymbol{e}_N(z)\rangle \quad (21)$$

で定義する (Berry-Simon 接続)。$z=re^{i\phi}$ とおき (18) からこの接続は

$$\omega_N(z) = \frac{ir^2d\phi}{(1+r^2)} = i\frac{1}{2}(1-\cos\theta)d\phi$$

となるので、磁荷が 1 のモノポール場 (9) と一致していることが分かる。

5 拡張されたホップ写像

前節でモノポール磁荷が 1 の場合のファイバー束の全空間は S^3 になっていることが、ホップ束との関係で明らかになったが、モノポール磁荷が 2 以上の場合のファイバー束の全空間はどうなっているだろうか。手始めに $n=2$ で考えてみる。S^3 から S^3 への写像を

$$(z_1,z_2)\to(z_1',z_2') = \left(\frac{z_1^2}{|z_1|}, \frac{z_2^2}{|z_2|}\right) \quad (22)$$

で定義する。極座標を使って表せば、

$$(z_1',z_2') = \left(\cos\frac{\theta}{2}e^{2i\xi_1}, \sin\frac{\theta}{2}e^{2i\xi_2}\right) \quad (23)$$

となる。この S^3 の中で θ が一定の面はトーラスになるが、ξ_1、ξ_2 が 0 から 2π まで動くと、このトーラスを 2 回覆うことになる。この (z_1',z_2') から S^2 へのホップ写像 (14) は、

$$p(z_1',z_2') = (2|z_1'|^2-1, 2z_1'\bar{z}_2') = \left(2\left|\frac{z_1^2}{|z_1|}\right|^2-1,\ 2\frac{z_1^2}{|z_1|}\frac{\bar{z}_2{}^2}{|z_2|}\right) \quad (24)$$

であるから、

$$(x',z') = \left(x, \frac{z^2}{|z|}\right) \quad (25)$$

となる。極座標で表せば、

$$(\sin\theta'\cos\phi',\ \sin\theta'\sin\phi',\ \cos\theta') = (\sin\theta\cos 2\phi,\ \sin\theta\sin 2\phi,\ \cos\theta) \quad (26)$$

である。つまり $\theta' = \theta$、$\phi' = 2\phi$ なので、ϕ が 0 から 2π まで動くとその像は S^2 を 2 回覆う。この拡張されたホップ束の局所自明化写像を用いると、

$$\psi'_S \circ \psi'^{-1}_N(x', z', w) = \left(x, \frac{z^2}{|z|}, \frac{z^2}{|z|^2}w\right) \tag{27}$$

となるので変換関数 g_{NS} は

$$g'_{NS} = \frac{z^2}{|z|^2} = \frac{z_1^2/|z_1|^2}{z_2^2/|z_2|^2} \tag{28}$$

である。極座標で表せば、

$$g'_{NS} = e^{2i\phi} \tag{29}$$

となり、モノポール磁荷が 2 のゲージ変換を表している。前節と同様に接続を求めると、

$$\omega'_N(z') = i(1 - \cos\theta)d\phi \tag{30}$$

となって、やはり $n = 2$ のモノポール場になっている。

6 まとめ

前節の考察からモノポール磁荷 n に拡張するには、式 (22) を

$$(z_1, z_2) \to (z'_1, z'_2) = \left(\frac{z_1^n}{|z_1|^{n-1}}, \frac{z_2^n}{|z_2|^{n-1}}\right)$$

とすればよい。この写像は S^3 から S^3 へ n 回覆うような写像である。このファイバー束も底空間が S^2 でファイバーが S^1、全空間が S^3 である。ホップ不変量は 2 つのファイバーの絡み数として定義されるが、ファイバーが n 重になっているので、2 つのファイバーの絡み数は n^2 であり、従ってホップ不変量は n^2 となることが予想される。また、ホップ不変量は大ざっぱには、ファイバー束のオイラー数とファイバーの長さであり、オイラー数はモノポール磁荷なので、

$$\text{ホップ不変量} = \text{モノポール磁荷} \times \text{多重度}$$

という関係があると予想される。

参考文献

(1) P.A.M Dirac Proc.Roy.Soc., A133, 60(1931)
(2) T.T. Wu and C.N. Yang, Phys.Rev.D12:3845-3857,(1975)
(3) H. Hopf, Math.Annalen, 104, 673(1931)
(4) G.L. Naber, Topology, geo,etry, and gauge fields, Springer(1997)

(2004. 11. 24 受理)