

曲率を用いた界面移動法による 過熱液中の気泡成長の数値解析

白川 英 観 *

Numerical Analysis of Bubble Growth in Superheated Liquid by Interface Tracking Method Using Curvature Information

SHIRAKAWA Hidemi

An interface tracking method is proposed which approximate surface geometry with polynomial expression using surface location, normal vector and curvature at surface point. In this method, a pressure difference caused by surface tension is easily calculated because normal vector and curvature are known. Using this method, the movement of a single sphere in an oblique direction has been simulated successfully with keeping its original shape. From the results of sphere crushing, this method can be applied to various interfacial phenomena with the separation and coalescence of surface. Furthermore, this method is applied to the phase change problems. In the calculation of ice ball growth, ice ball grows keeping spherical shape. In the calculation of bubble growth, bubble deformed its shape because of error in curvature. In order to avoid the error in curvature, the surface has to be smoothed using adjacent surface point.

Key Words: Interface Tracking, Curvature, Phase Change, Numerical Analysis

1. 結 論

気泡や液滴などの表面張力が支配的な流れを解析する場合、数値で表現した界面の変形と移動を検知し、さらに界面形状から流動に及ぼす表面張力の影響を正確に評価しなければならない。界面を移動する方法には、MAC (Marker and Cell) 法¹⁾や密度関数法、VOF (Volume of Fluid) 法²⁾などがある。MAC法では流体の界面位置をマーカーにより表現し、それを移動することによって界面移動を行っているため、体積の保存性において問題がある。また、密度関数法では界面に拡散領域を設定して移動しているため、界面の不連続という物理上の問題がある。VOF法では検査体積に存在する液体の体積率を用いて界面移動を行っているので体積の保存性はよいという長所はあるが、界面の幾何形状を崩すという短所もある。

一方、気泡成長などの気液間の相変化を伴う流れでは、気液界面において気液間の密度差による速度の不連続も生じる。著者らは、これまでに体積の保存性を重視し、VOF法をベースにした改良を行ってきた。

まず、界面移動や表面張力の計算などの精度を改良し³⁾⁴⁾、次いで相変化現象を取り扱える熱流動数値解法の構築を行った⁵⁾。この熱流動数値解法を円柱座標系の気泡成長問題に適用した結果、ヘリウムの場合は、同心円状の温度分布で、球形状を維持したまま成長した。一方、水の場合は、球形状のまま成長したが、界面の存在するセル (表面セル) 間において気液の速度を等しいと仮定したために、気液界面の接線方向に不自然な流れが生じてしまい、温度分布は同心円状にならないという不具合が生じた。また、改良を施した界面移動法を3次元に拡張するには、界面パターン分類数が多くなり、計算時間がかかるばかりでなく、界面移動の精度もさほど向上しないと思われる。

そこで、界面位置、法線ベクトル、曲率を用いて近似した界面曲線を移動することによって次ステップの界面位置と法線ベクトル、曲率を求める3次元の界面移動法の開発を試みた。この界面移動法では表面張力の影響を考慮する時に必要となる界面の位置や法線ベクトル、曲率が既知量であり、表面張力による気液間の圧力差は四則演算により容易に求めることができる。そして、この界面移動法を、球体の等速移動や球体の分離問題に適用し、その界面の幾何精度や界面の合体分離の可能性を調べた。さらに、氷の成長や気泡

* 富山工業高等専門学校 機械工学科
(〒939-8630 富山市本郷町13番地)。
E-mail: shira@toyama-nct.ac.jp

の成長などの相変化問題に適用し、この界面移動法が相変化現象を伴う熱流動問題に適用可能であることを検討した。

2. おもな記号

A : 座標変換行列	[]
c_p : 定圧比熱	[J/(kg·K)]
L : 潜熱	[J/kg]
m' : 相変化に伴う単位面積あたりの質量変化量	[kg/(m ² ·s)]
n : 界面法線単位ベクトル	[]
p : 圧力	[Pa]
p_s : 表面張力による圧力差	[Pa]
q : 熱流束	[w/m ²]
t : 時間	[s]
T : 温度	[K]
v : 速度	[m/s]
$x=(x,y,z)$: 界面位置ベクトル	[m]
$X=(X,Y,Z)$: 界面近似曲線に用いる座標系での界面位置ベクトル	[m]
κ : 曲率	[1/m]
λ : 熱伝導率	[w/(m ² ·K)]
ρ : 密度	[kg/m ³]
τ : セン断応力	[N/m ²]

添え字

- l : 液体領域
- g : 気体領域
- s : 界面
- X,Y : 界面接線方向, 界面法線方向
- x,y,z : 直角座標方向

3. 曲率を用いた界面移動法

変数は図1のように、界面位置 x_1, x_2 を計算格子線上で定義し、その界面位置に法線ベクトル n_1, n_2 および曲率 κ_1, κ_2 を定義する。定義する曲率は平均曲率ではなく、 xy 平面や yz 平面、 xz 平面における曲率である。例えば、 x 軸方向の界面では xy 平面における曲率 κ_y と xz 平面における曲率 κ_z の2つが存在する。

図2に示すように、界面が(a)から(b)に移動する過程を(c)と(d)の二つに分解する。すなわち最初 x 方向に移動し、その後 y 方向に移動する。3次元の場合はさらに z 方向にも移動する。各方向への界面移動は同じ手順で求めることができるので、ここでは x 方向のみ図3を用いて説明する。最初に界面位置を界面の x 方向速度 $v_{s,x}$ で移動した点▲を求める(図3(b))。そして、移動した2点の界面位置より、移動後の界面位置1を原点とする界面の法線方向 Y と接線方向 X の座標系を設定し、界面を5次の多項式で近似する。

$$Y = \sum_{j=0}^5 a_j X^j \tag{1}$$

$$X = A(x - x_1) \tag{2}$$

式(2)右辺の A は XY 座標系への座標変換行列である。

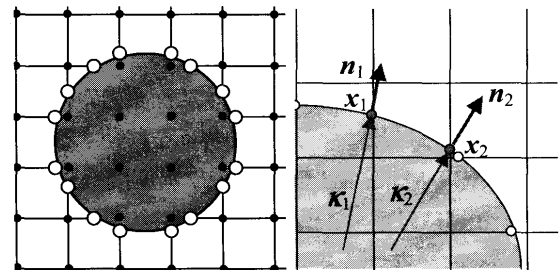


Fig.1 Definition of surface location, normal vector and curvature.

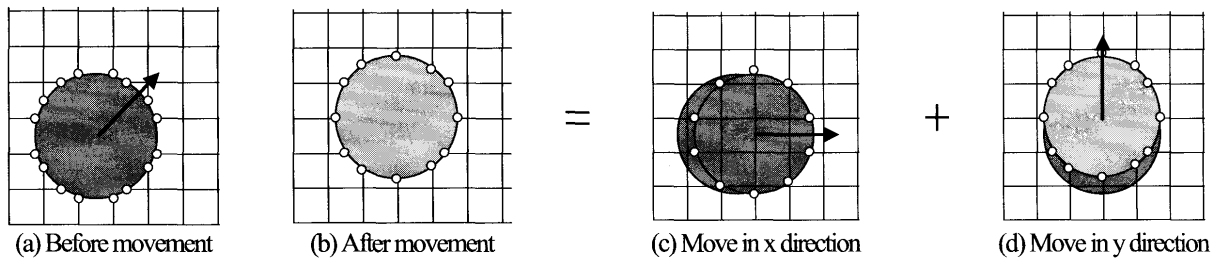


Fig. 2 Procedure for surface movement

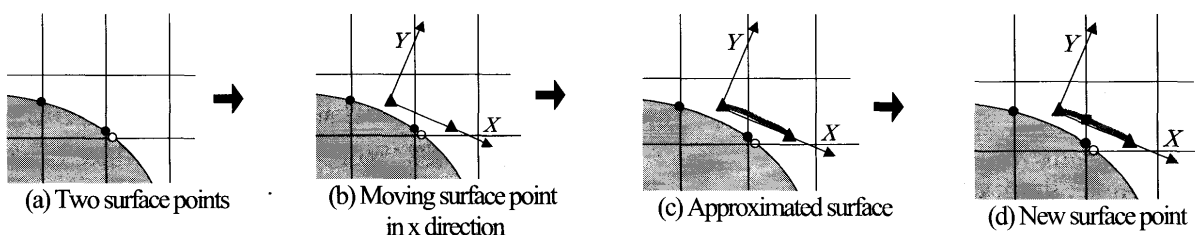


Fig. 3 Surface tracking method

多項式(1)の係数 q_i は 2つの界面の位置 (x_1, x_2) , 法線ベクトル (n_1, n_2) , 曲率 (κ_1, κ_2) の合計 6つの値から求める。このとき, 界面移動前後において界面の法線ベクトルおよび曲率が変化しないと仮定する。移動前の法線ベクトル n より界面の傾きである 1階微分 (Y'_1, Y'_2) を, 曲率 κ より界面の 2階微分 (Y''_1, Y''_2) を求める。

$$Y_i = 0 \tag{3}$$

$$Y'_i = n_{y,i} / n_{x,i} \tag{4}$$

$$Y''_i = \kappa_{xy,i} (1 + (Y'_i)^2)^{1.5} \tag{5}$$

ここで, $(n_{x_i}, n_{y_i}, n_{z_i})$ は座標変換により求められた法線ベクトルであり, κ_{xy} は XY 平面の曲率である。近似した界面と計算格子間の交点 ■ (図 3(d)) を求め, x 方向移動後の界面位置 x とする。このとき, 交点では界面の近似式より 1階微分 Y' , 2階微分 Y'' が求められるので, 界面の法線ベクトル n と曲率 κ を更新することができる。以上の手続きをすべての界面位置間で行う。なお, 計算格子間には 1つの界面位置しか入らないようにすることにより界面の分離・合体を取り扱えるようにした。

曲率を用いた界面移動法の精度を確認するために, 図 4 に示すように直角座標系において, 球および楕円球体を斜め方向に移動させて形状の保存性を調べた。球の計算結果として xy 平面上の界面位置を図 5 に示す。150step 移動したにも関わらず球の形状をかなりの精度で維持している。図 6 に示す楕円球体の移動でも, 時間経過に関わらず初期の形状を維持している。図 6 以外の yz 平面, zx 平面も同じ界面位置であることを確認してある。

表面張力による圧力差を求めるのに必要な界面位置の曲率は四則演算で求めることができる。例えば, 界面位置が x 軸方向にある時の曲率 κ は次式となる。

$$\kappa = \kappa_{xy} \sqrt{1 - n_z^2} + \kappa_{zx} \sqrt{1 - n_y^2} \tag{6}$$

球の移動前後の曲率を図 7 に示す。初期の時点で誤差はないが, 球体の移動後に誤差が生じている。これは, 界面を 5 次の多項式で近似しているために, 球形状である界面を正確に近似できないためだと考えられる。しかし, 移動回数を重ねてもある誤差量の範囲であることから, 流動計算を行うと表面張力の影響により曲率の誤差も小さくなる可能性がある。

次に, 図 8 に示すように, 水平方向は球の半径方向に, 垂直方向は球の中心方向に連続的に変化させた界面速度を用いて球の変形計算を行い, 界面の結合・分

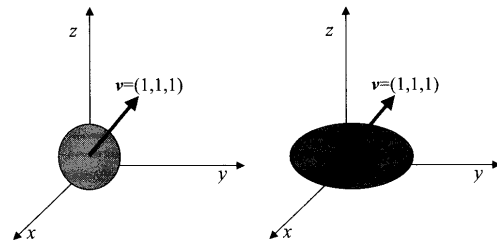


Fig. 4 Calculation model

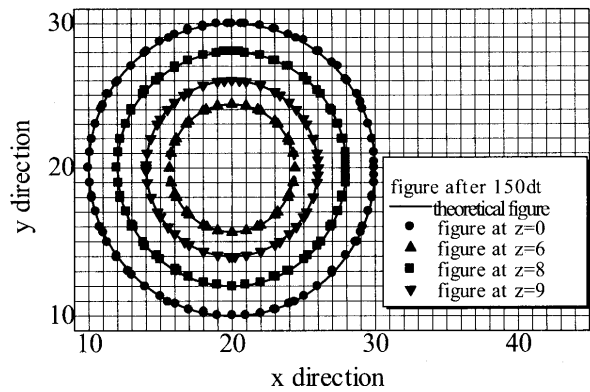


Fig. 5 Movement of sphere in an oblique direction

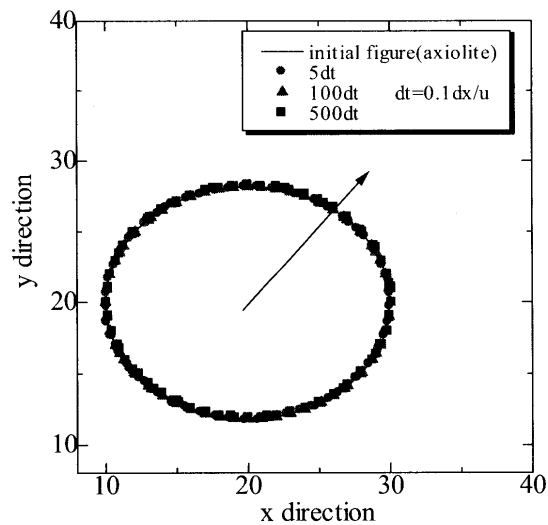


Fig. 6 Movement of antilite in an oblique direction

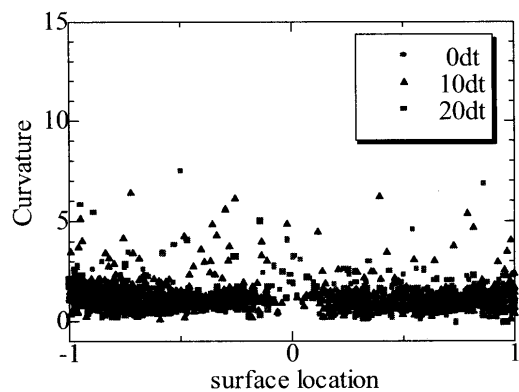


Fig. 7 Curvature

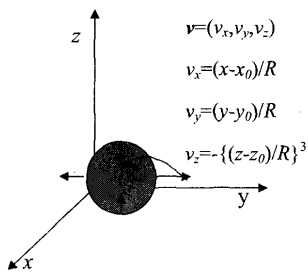


Fig. 8 Crushing sphere model

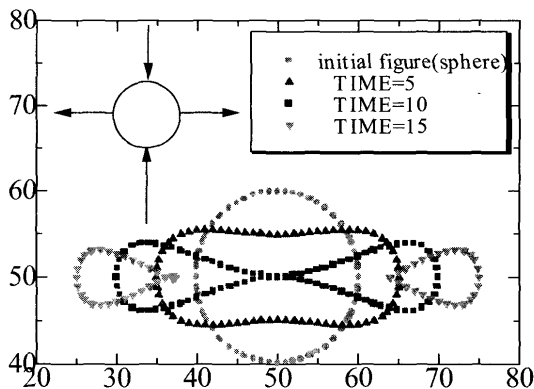


Fig. 9 Shape of curshing sphere

離が可能であるか調べた。図9は界面の時間変化を示したものである。球の中心部は徐々に潰れて、界面が結合し、ドーナツの形状になるのが分かる。

以上のことから、提案した曲率を用いた界面の移動法は、曲率の計算精度に問題があるが、界面幾何形状の計算精度がよく、気泡などの自由界面を有する解析に有効であると思われる。

4. 相変化問題への適用

気液界面では、相変化により速度の不連続が生じる。しかし、界面において、質量、運動量、熱エネルギー量は保存される。この界面における接続条件を境界条件として、気液両相の熱流動計算を行う。

界面における接続条件の求め方は、どの方向も同じであるため、 x 方向に界面がある場合のみ説明する。計算は図10(a)に示すスタッガード格子で行う。圧力 p 、温度 T は検査体積中心で、速度 v は検査体積表面位置で定義する。

最初に界面の温度を飽和温度 T_{sat} と仮定する。

$$T_s = T_{sat} \tag{7}$$

次に、界面近傍の液体の熱流束 q_l と気体の熱流束 q_g の差によって界面に生じる熱量がすべて相変化に使われると仮定すると、相変化に伴う界面投影面積あたりの質量変化量 m' は次式で表される。

$$m' = -\frac{q_g - q_l}{L} \tag{8}$$

$$q_l = -\lambda_l \frac{T_s - T_i}{\delta x_l} \tag{9}$$

$$q_g = -\lambda_g \frac{T_{i+1} - T_s}{\delta x_g} \tag{10}$$

ここで δx_l 、 δx_g は図10(b)に示す界面までの距離である。また、 m' は正のときが蒸発量であり、負のときが凝縮量である。

界面の移動速度 v_s や、界面における気液の速度 $v_{s,l}$ 、 $v_{s,g}$ は、界面投影面積あたりの相変化に伴う質量変化量 m' より求める。

$$\rho_l (v_{s,l} - v_s) = \rho_g (v_{s,g} - v_s) = m' \tag{11}$$

気液間の圧力差は、表面張力と慣性力による圧力差とし、気液界面での気液両相の粘性応力は等しいと仮定した。

$$p_l + m' v_{s,l} = p_g + m' v_{s,g} - p_s \tag{12}$$

$$\tau_{ij,l} = \tau_{ij,g} \tag{13}$$

気液の各相における支配方程式は、連続の式、N-S方程式、熱エネルギーの保存式である。

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{14}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v}) = -\frac{1}{\rho} \{ \nabla p + [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}] \} \tag{15}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (T\mathbf{v}) = \frac{\nabla \cdot (\lambda \nabla T)}{\rho c_p} \tag{16}$$

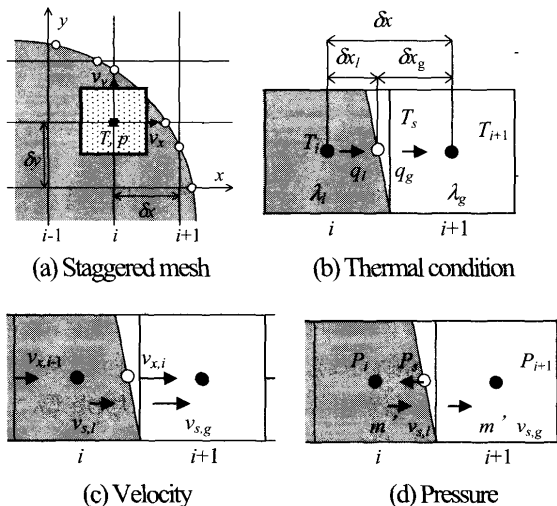


Fig. 10 Mesh system and connecting condition at surface

この支配方程式を差分し、流動計算は SMAC 法で、温度分布は陰解法で解く。時間を上添え字 “ n ” で表すと、離散式は次のようになる。

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} = 0 \quad (17)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}^{n+1} = \mathbf{v}^n - \delta t [\nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v})^n + \frac{1}{\rho} \{ \nabla p^n + [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}]^n \}] \quad (18)$$

$$\mathbf{v}^{n+1} = \tilde{\mathbf{v}}^{n+1} - \frac{\delta t}{\rho} \nabla \delta p^{n+1} \quad (19)$$

$$\frac{T^{n+1} - T^n}{\delta t} + \nabla \cdot (T\mathbf{v})^{n+1} = \frac{\nabla \cdot (\lambda \nabla T)^{n+1}}{\rho c_p} \quad (20)$$

式(18)で求めた速度の推定値は必ずしも連続の式(17)を満足しているとはいえない。そこで、圧力を補正することにより、連続の式を満足させる。ただし、気液界面を含むセルでは、式(19)の密度を界面までの距離で算術平均した値とする。

式(19)と(17)から \mathbf{v}^{n+1} を消去すると次の圧力補正值 δp^{n+1} の poisson 方程式が得られる。

$$\nabla \left(\frac{1}{\rho} \nabla \delta p^{n+1} \right) = \frac{\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}^{n+1}}{\delta t} \quad (21)$$

計算手順は次のとおりである。

- 1) 3.で説明した界面移動法により界面を移動し、新しい時刻における界面位置 \mathbf{x} 、界面法線ベクトル \mathbf{n} 、曲率 κ を求める。
- 2) 界面で飽和温度と設定し、式(20)を陰解法で解いて、温度分布 T^{n+1} を求める。そして、界面法線ベクトル \mathbf{n} と温度分布 T^{n+1} より相変化に伴う質量変化量 m' と気液の速度差 $v_{sg} - v_{sl}$ を求める。
- 3) 表面張力による圧力差 p_s を界面位置 \mathbf{x} 、界面法線ベクトル \mathbf{n} 、曲率 κ より求める。
- 4) 界面での接続条件を用いて、式(18)より速度の推定値を求める。
- 5) 圧力補正值 δp^{n+1} の poisson 方程式 (式(21)) の連立1次方程式をガウスの消去法で解き、圧力の補正值 δp^{n+1} を求め、式(19)より速度 \mathbf{v}^{n+1} を求める。
- 6) 界面での質量保存式である式(11)より界面の移動速度 v_s を界面近傍の気液の速度 v_{sb} 、 v_{sg} と気液の速度差 $v_{sg} - v_{sl}$ から求める。

以上の手順を終了時間まで繰り返す。なお、凝固・融解などの現象を取り扱う場合は、界面の温度を融点とし、融解潜熱を負の値で入力するとよい。

界面における相変化の計算方法を確認するために、過冷却水中に置かれた球形状である氷の成長問題を計算した。計算は氷の初期直径を 1.1mm、過冷却度を 5K とし、0.2mm の等間隔メッシュ (20×20×20) で行った。この計算では、水と氷の密度を等しいと仮定しているため、界面における凝固量と界面の速度のみが生じ、固相、液相ともに速度はゼロとなる。したがって、両相内部には流れが生じないので流動計算は行わなかった。

氷の中心位置をとる xy 平面における温度分布と界面位置 (●) の変化を図 11 に示す。氷は多少、表面に凹凸があるものの、時間とともにほぼ球形状で成長し、同心円状の温度分布を形成している。 yz 平面及び xz 平面も同様の計算結果であることは確認した。

過熱液中の気泡成長問題を計算した。この計算では気液の密度差があるので、界面において速度の不連続が生じる。計算は2次元直交座標系で、気泡の初期直

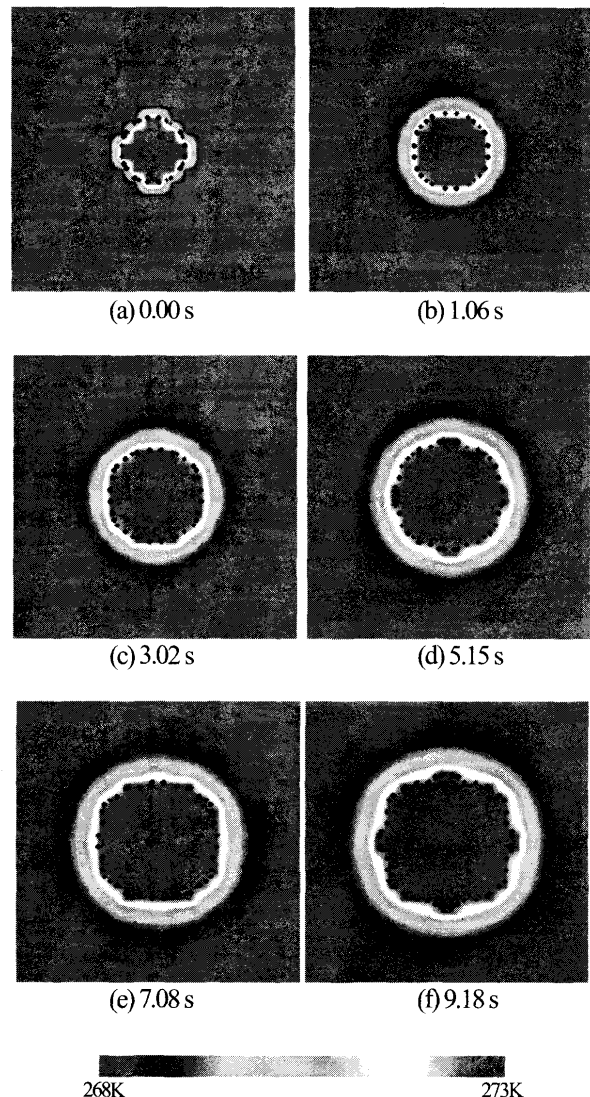


Fig 11 Growth of ice ball

径を 1.1mm, 過熱度を 5K とし, 0.2mm の等間隔メッシュ (20×20) を用いて行った.

表面張力の影響を考慮しない場合の温度分布および界面位置(●), 速度分布の変化を図 12 に示す. 速度分布はベクトルで表示してある. 気泡は, ほぼ球形状で成長し, 同心円状の温度分布を形成している. また, 液体も気泡から放射線状に流れているのが分かる.

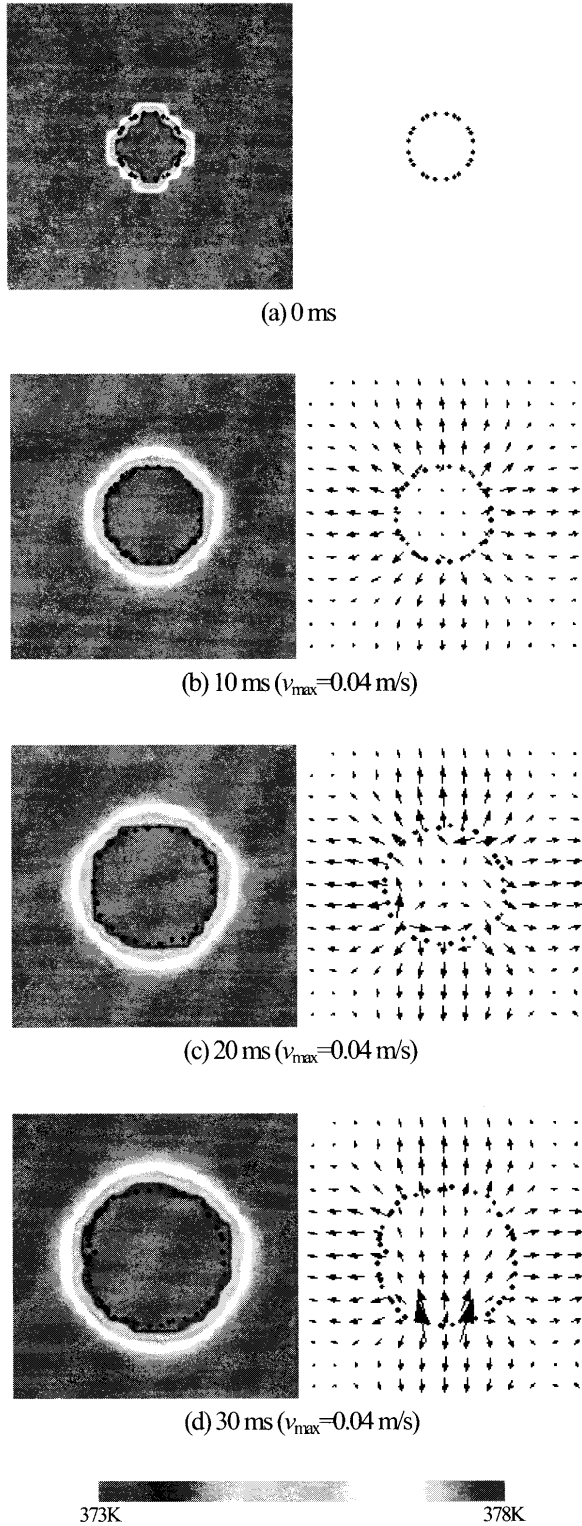


Fig. 12 Growth of bubble without surface tension.

表面張力を考慮した場合の温度分布および界面位置(●), 速度分布の変化を図 13 に示す. 予想に反して気泡周辺に乱れが生じ, それに伴い気泡は極度に变形した. その後, 変形を繰り返しながら, 計算は約 2.0ms で発散した.

計算が発散した原因を探するために, 曲率の精度を調べた. 図 14は表面張力を考慮しない計算の曲率の変

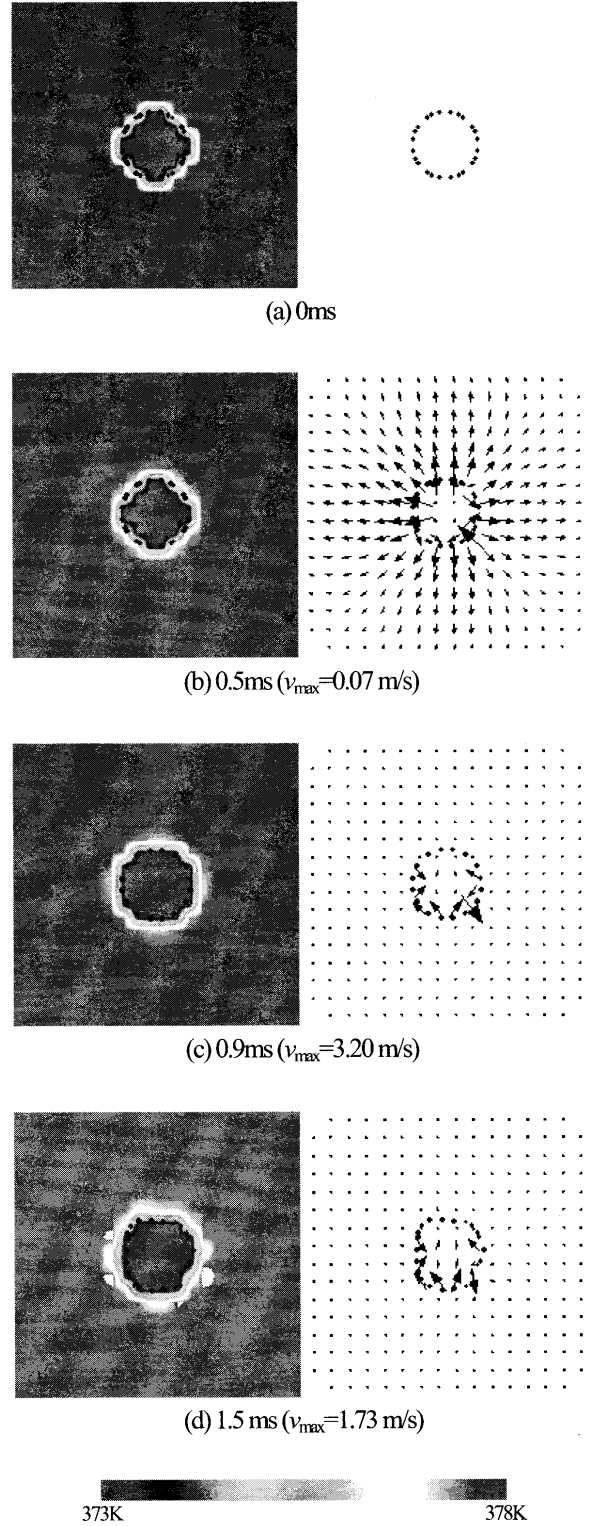


Fig. 13 Growth of bubble with surface tension

化である。気泡は、ほぼ球形状であるにも関わらず曲率にはかなりの誤差が生じている。表面張力を考慮した計算の曲率の変化を図 15 に示す。時間 0.8ms 以降でかなりの誤差を生じているのが分かる。この時間は界面が計算格子点を通過した時間であった。

以上のことから、界面の変形の原因として次のことが推測される。界面を 5 次の多項式で近似しているため、界面は 2 点の界面位置間の距離よりも短い波長の波を有する。そのため、2 点の界面位置が非常に近くなると波長も小さくなるので、かなり大きな曲率が発生した。表面張力の影響が小さい場合、曲率を用いて求められる表面張力の影響も小さく、流れにほとんど影響を及ぼさなかった。しかし、表面張力の影響が大きい場合、気泡周辺に圧力の乱れを生じ、さらに界面を乱す。その結果、計算は発散に至った。したがって、この界面の乱れを防ぐには、隣接する界面位置などを用いて界面を平滑化し、高周波成分の凹凸をなくす必要がある。

5. 結 言

曲率、界面法線ベクトル、界面位置を用いて界面を近似し、移動する界面移動法を提案した。球体や楕円球体を一定速度で移動した計算結果は、かなりの精度で形状を維持していた。しかし、移動後の界面における曲率には誤差を含むことが分かった。また、球体を上下から潰す計算結果より、本界面移動法は界面の分離・合体問題に適用できることを示した。

本界面移動法を相変化問題に適用した結果、固液間や表面張力の影響が小さい気液間の相変化問題に適用できることを示した。しかし、表面張力の影響が大きい相変化問題では、曲率の誤差により界面が振動し発散する計算結果となった。今後、界面の平滑化などの改良が必要である。

本研究の一部は文部科学省科学研究費補助金若手研究(B) (No. 14750142) の補助により行われたことを記し、感謝の意を表す。

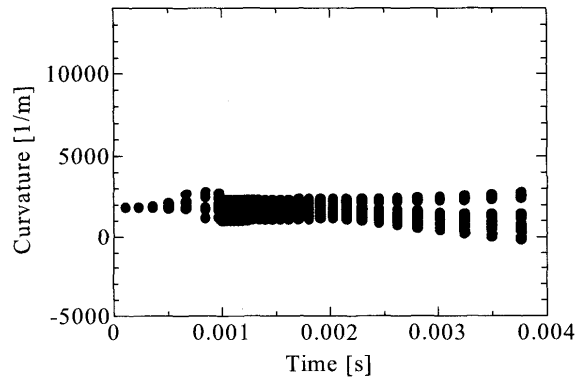


Fig. 14 Curvature change during bubble growth without surface tension

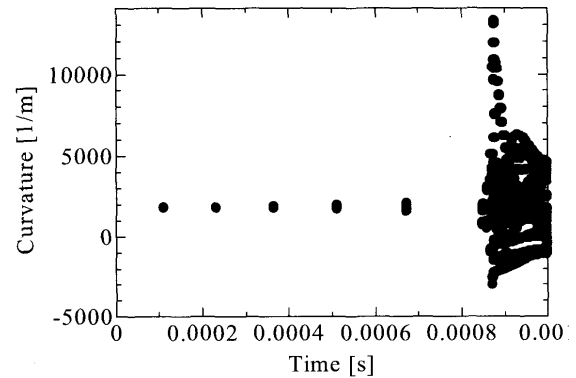


Fig. 15 Curvature change during bubble growth with surface tension

文 献

- [1] J. E. Welch et. al, Report No. LA-3425, Los Alamos Scientific Laboratory, (1966).
- [2] B. D. Nichols et. al, Report No. LA-8355, Los Alamos Scientific Laboratory, (1980).
- [3] 白川英観 他 3 名, 日本機械学会論文集, 62 巻 604 号 B 編, pp.4068-4075, (1996).
- [4] 白川英観 他 3 名, 日本機械学会論文集, 66 巻 647 号 B 編, pp. 1667-1674, (2000).
- [5] 白川英観 他 4 名, 日本機械学会論文集, 66 巻 649 号 B 編, pp.2405-2412, (2000).

(2004. 11. 24 受理)