ゲージ理論におけるアノマリーとホロノミー

山腰　等 *

Anomaly and Holonomy in Gauge Theory

YAMAKOSHI Hitoshi

We study the topological meaning of gauge anomalies in the field theories. We show that gauge anomalies can be interpreted as holonomy and curvature of the determinant line bundle over the gauge orbit space. The relationship between the holonomy and Chern-Simons term is explained.

キーワード: ゲージ理論、アノマリー、ホロノミー、Chern-Simons 項

1 はじめに

物理学と数学は相互に影響を与えながら発展してきた。近年、場の量子論においてその関係は特に密接になってきているように思われる。ゲージ場の理論が、数学におけるファイバー束のことばで記述できることが分かったのは、今から約 30 年前のことであるが (1)、その後、アノマリーと呼ばれる現象が、指数定理で理解できることが指摘され (2)、最新の弦理論や膜理論おいても、次々に数学的な解釈がなされている。むしろ最近は、物理学の方が数学に刺激をあたえ発展させるきっかけを与えているように思える。本論文では、ゲージ場の理論に現れるアノマリーの幾何学的な面を考察する。アノマリーを Berry の位相と関係づけることは多くの人たちによってなされてきた (3)。Berry の位相を用いた議論はハミルトン形式を用い正準量子化の立場からのアプローチであり、アノマリーがパラメータ空間の曲率で表される。一方、ラグランジ形式を用いた議論では、指数定理やゲージ場の空間のトポロジーがアノマリーと関係してくる (4)。本稿では、ラグランジ形式をとりながら、ホロノミーや曲率といった Berry の位相にあわられる量でアノマリーを理解することを試み、Chern 形式や Chern-Simons 形式が曲率やホロノミーと見なせることを示す。

2 ゲージ・アノマリー

場の理論では、古典論で存在していた対称性が量子論に移っても成り立っているとは限らない。このような対称性の破れる現象をアノマリーと呼んでいる。ゲージ場と質量が無いフェルミオンが相互作用している理論では、カイラル対称性やゲージ対称性にアノマリーが現れる。ここでは、ゲージ・アノマリーについて考える。

ワイルフェルミオンが、ゲージ場 $A_\mu = A_\mu^a \lambda^a$($\lambda^a$ は群 G の生成子) と相互作用している有効作用 $\Gamma(A)$ を次のように定義する。

$$e^{-\Gamma(A)} = \int d\bar{\psi} d\psi e^{-\int \bar{\psi} i \not{D}_+ \psi} \tag{1}$$

$$\not{D}_+ = \gamma^\mu (d_\mu + A_\mu) \left(\frac{1+\gamma_5}{2} \right)$$

この有効作用は、無限小ゲージ変換

$$\begin{aligned} &A_\mu \to A_\mu - D_\mu v, \\ &D_\mu v = \partial_\mu v + [A_\mu, v],\ v = v^a \lambda^a \end{aligned} \tag{2}$$

に対して形式的に次のようになる、

$$\Gamma(A) \to \Gamma(A) + \int dx v^a(x) D_\mu \frac{\delta \Gamma(A)}{\delta A_\mu^a} . \tag{3}$$

もともとの作用にゲージ対称性があったので、有効作用にもゲージ不変性があれば、$D_\mu \delta\Gamma(A)/\delta A_\mu^a = 0$ となるはずである。ゲージ不変性にともなうカレントを

$$\langle J^{\mu a} \rangle = \frac{\delta \Gamma(A)}{\delta A_\mu^a} \tag{4}$$

と定義するとゲージ不変性は、カレントの保存則を表す。しかしながら、実際に計算してみると

$$\begin{aligned} &D_\mu \langle J^{\mu a} \rangle \\ &= \frac{1}{24\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \mathrm{tr} \lambda^a \partial_\mu \left(A_\nu \partial_\rho A_\sigma + \frac{1}{2} A_\nu A_\rho A_\sigma \right) \end{aligned} \tag{5}$$

* 一般科目

となって保存せず、アノマリーが現れる。ゲージ対称性が量子論で失われると、くり込み可能性やユニタリ性などの物理的な要請が満たされなくなるという不都合が生じる。

3 指数定理とゲージ・アノマリー

時空が 2n 次元の理論に現れるゲージ・アノマリーは、$2n+2$ 次元の指数定理と関係があることが分かっている [2]。簡単のために時空をユークリッド化して 2n 次元球面 S^{2n} とし、パラメータ θ をもった次のゲージ場を考える。

$$A^{\theta} = g^{-1}(\theta)Ag(\theta) + g^{-1}(\theta)d_x g(\theta) \tag{6}$$

ここでのゲージ変換 g は

$$g(\theta, x):\ S^1 \times S^{2n} \to G \tag{7}$$

で、$g(0,x) = g(2\pi, x) = 1$ を満たすものとする。ゲージ場全体の空間（配位空間）を $\mathcal{A}$ とすると、A^{θ} は、θ を 0 から 2π まで動かすと $\mathcal{A}$ のなかで円をえがく。その円を縁とする円盤 D を、

$$A^{\theta,t} \equiv tA^{\theta} = tg^{-1}(A + d_x)g \tag{8}$$

と表されるゲージ場の集まりであるとする。

先ほどの有効作用は、1-loop の摂動では、有限化されたディラック作用素の行列式と見なせるので、ここでは $\det i\not{D}$ と表そう。これをゲージ変換すれば式 (5) のアノマリーが現れるが、それを次のようにあらわす。

$$\det i\not{D}(A^{\theta}) = \det i\not{D}(A)\ e^{iw(\theta, A)}. \tag{9}$$

ここに現れる、$w(\theta, A)$ がアノマリーを表している。ゲージ場の配位空間 $\mathcal{A}$ は、ゲージ変換群 $\mathcal{G}$ をファイバーとする軌道空間 $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ 上の主束とみなすことができる。するとパラメータ θ は、ファイバー上の円を表しており、アノマリーに対する Wess-Zumino 条件より、θ が 0 から 2π まで変わったとき $\exp iw(0, A) = \exp iw(2\pi, A)$ とならなければならない。つまり、$\exp iw(\theta, A)$ を S^1 から S^1 への写像とみなし、その写像は巻き付き数

$$m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \frac{dw(\theta, A)}{d\theta} \tag{10}$$

で特徴づけられる。この整数 m が実は $2n+2$ 次元のディラック作用素の指数であることが次ぎようにして分かる。

$2n+2$ 次元のゲージ場を、

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_a &= tg^{-1}(A + d + d_{\theta})g \\ &= A^{t,\theta} + tg^{-1}d_{\theta}g \\ d = dx^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}&, \quad d_{\theta} = d\theta\frac{\partial}{\partial\theta} \end{aligned} \tag{11}$$

とする。このゲージ場が定義されてる空間は、$D \times S^{2n}$ であり、半径方向のパラメータが t である。空間に境界があると指数定理が複雑になるので、円盤 D を 2 つくっつけて S^2 にする。ゲージ場 (11) を北極側 D_+ にして、南極側 D_- のゲージ場を、

$$\mathbb{A}(x, s, \theta) = A \tag{12}$$

とする。s は半径方向のパラメータである。すると赤道 ($t=1$, $s=1$) でのゲージ変換は $g(\theta, x)$ になる。このゲージ場から $2n+2$ 次元の場の強さ、

$$\mathbb{F} = d\mathbb{A} + \mathbb{A}^2 \tag{13}$$

を使って、指数定理は

$$\begin{aligned} &\mathrm{ind}\, i\not{D}_{2n+2} \\ &= \frac{1}{(2n)^{n+1}(n+1)!}\int_{S^2 \times S^{2n}} \mathrm{tr}\mathbb{F}^{n+1} \end{aligned} \tag{14}$$

となるが、この値が整数をとることは、次のように変形すれば分かる。局所的には $\mathrm{tr}\mathbb{F}^{n+1} = dQ_{2n+1}$ なので、式 (14) の被積分関数は、

$$\begin{aligned} &Q_{2n+1}(\mathbb{A}, \mathbb{F})|_{t=1} - Q_{2n+1}(\mathbb{A}, \mathbb{F})|_{s=1} \\ &= Q_{2n+1}(g^{-1}\tilde{d}g, 0) + \tilde{d}\alpha_{2n} \\ &= (-1)^n \frac{(n+1)!n!}{(2n+1)!}\mathrm{tr}(g^{-1}\tilde{d}g)^{2n+1} + \tilde{d}\alpha_{2n} \end{aligned} \tag{15}$$

となる。ここで $\tilde{d} = d + d_{\theta}$ である。最後の項は $S^1 \times S^{2n}$ 上の積分では 0 なので、式 (14) は、

$$\begin{aligned} &\mathrm{ind}\, i\not{D}_{2n+2} \\ &= \frac{(-1)^n}{(2\pi)^{n+1}}\frac{n!}{(2n+1)!}\int_{S^1 \times S^{2n}} \mathrm{tr}(g^{-1}dg)^{2n+1} \end{aligned} \tag{16}$$

となる。この積分は、パラメータ θ と空間 S^4 で行われるが、θ は関数 $g(\theta, x)$ は $\{g(x) : S^{2n} \to G\}$ の空間の中の閉曲線 S^1 であることを考慮すれば、$S^1 \times S^{2n}$ は位相的には S^{2n+1} に等しい。積分 (16) は、S^{2n+1} から、G の中の S^{2n+1} への纏わり数 $\pi_{2n+1}(G)$ を定め整数になる。さらに式 (15) の $s=1$ の項は、θ によらないので、結局、指数定理 (14) は、

$$\mathrm{ind}\, i\not{D}_{2n+2} = \int_{S^1 \times S^{2n}} Q_{2n+1}\left(A^{\theta} + \hat{v}, F^{\theta}\right) \tag{17}$$

となる。ここで、$\hat{v} \equiv g^{-1}d_\theta g \equiv vd\theta$ で、$F^\theta = \tilde{d}(A^\theta + \hat{v}) + (A^\theta + \hat{v})^2 = g^{-1}Fg$ である。この積分はアノマリー w の積分であったので、この積分の θ 方向の無限小を考えるとそれは通常の無限小ゲージ変換のアノマリーを与えるはずである。v を無限小にとって、

$$\begin{aligned} &Q^1_{2n}(\hat{v}, A^\theta, F^\theta) \\ &= Q_{2n+1}(A^\theta + \hat{v}, F^\theta) - Q_{2n+1}(A^\theta, F^\theta) \end{aligned} \tag{18}$$

とし、具体的な例として 4 次元 S^4 でこれを積分すると、

$$\begin{aligned} &\int_{S^4} Q^1_4(\hat{v}, A^\theta, F^\theta) \\ &= \frac{-i}{48\pi^3}\int_{S^4} \mathrm{tr}\hat{v}d\left(A^\theta dA^\theta + \frac{1}{2}(A^\theta)^3\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}d_\theta w[A, \theta] \end{aligned} \tag{19}$$

となり、式 (5) よりこれがアノマリーを表していることが分かる。

このように時空が 2n 次元のゲージ・アノマリーは、2n+2 次元のディラック演算子の指数定理から導かれるが、この余分な 2 つのパラメータ (θ, t) はゲージ場についてのものであり、(θ, t) を動かすと 4 次元のゲージ場の全体を $\mathcal{A}$ の中の円盤 D を与えたのであった。$\mathcal{A}$ を底空間 $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ 上のファイバー束と見なすと、この円盤の境界 $(t = 1)$ は、ゲージ変換で結ばれているので、同一ファイバー上にあり、底空間では一点になる。つまり $\mathcal{A}$ での円盤の $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ への射影は、2 次元球面になる。$2n + 2$ 次元のディラック演算子の指数は、式 (16) より $\pi_{2n+1}(G)$ で与えられるが、これは、$\pi_{2n+1}(G) = \pi_1(\mathcal{G})$ となることが知られており、さらに、$\pi_1(\mathcal{G}) = \pi_2(\mathcal{A}/\mathcal{G})$ の関係がある。つまり、$\mathcal{A}/\mathcal{G}$ の中の 2 次元球面によるホモトピー群が自明でないということと、アノマリーが存在するということが対応している。

4 行列式直線束

直線束とは、ファイバーが復素 1 次元空間 $\mathbb{C}$ であるファイバー束である。底空間を M とし、その中の道 $\gamma : [0, 1] \to M$ をきめると、その道に沿っての平行移動がきまる。接続を ∇、断面を ξ とすれば、平行移動は次の式で定義される。

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\xi = 0 \tag{20}$$

底空間 M の開被覆 U_α 上で表せば、接続形式を A_α として、

$$\frac{d\xi_\alpha}{dt} = -A_\alpha(\gamma)\xi_\alpha \tag{21}$$

であり、積分して、

$$\xi_\alpha(t) = \exp(-\int_0^t A_\alpha(\gamma(t))\xi_\alpha(0) \tag{22}$$

である。道 γ を閉じた道 $\gamma(0) = \gamma(1)$ にすると、この閉曲線に対してホロノミー

$$\mathrm{hol}(\gamma) = \exp(-\int_\gamma A_\alpha) \tag{23}$$

が決まる。閉曲線 γ が円盤 D の境界であるなら、Stokes の定理によって、

$$\mathrm{hol}(\gamma) = \exp(-\int_D dA_\alpha) \tag{24}$$

となる。この直線束の変換関数を $g_{\alpha\beta}$ とすれば、接続形式 A_α は

$$A_\alpha = A_\beta + g^{-1}_{\alpha\beta}dg_{\alpha\beta} \tag{25}$$

と変換されるので、

$$dA_\alpha = dA_\beta \tag{26}$$

となり、底空間 M 上で大域的に 2 次形式が定義できる。これを曲率 F と呼ぶ。まとめると、D の境界が γ のとき

$$\begin{aligned} \mathrm{hol}(\gamma) &= \exp(-\int_\gamma A_\alpha) = \exp(-\int_D dA_\alpha) \\ &= \exp(-\int_D F) \end{aligned} \tag{27}$$

となる。

前節でゲージ場の空間 $\mathcal{A}$ をゲージ変換群 $\mathcal{G}$ をファイバーとする軌道空間 $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ 上の主束とみなした。有効作用であるディラック演算子の行列式は、式 (9) を満たす $\mathcal{A}$ 上の関数であるが、これを $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ 上の直線束の断面だと見直す。それは、次のように定義される。まず、$\exp iw(A, g) = f(A, g)$ とおき、$\mathcal{A}$ と複素数 $\mathbb{C}$ との空間 $\mathcal{A} \times \mathbb{C}$ に次の同値関係をいれる。

$$(A, c) \sim (A^g, f(A, g)c). \tag{28}$$

この同値類の空間 $[(A, c)]$ が $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ 上の複素直線束

$$L_f \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\mathcal{A} \times \mathbb{C})/\sim \tag{29}$$

を定める。底空間への射影は、$\pi : [(A, c)] \to [A]$ であり、断面 ψ は

$$\psi([A]) \stackrel{\mathrm{def}}{=} [(A, \det i\not{D}(A))] \tag{30}$$

である。このように定義された直線束をディラック演算子の行列式直線束と呼ぶ。

5 Wess-Zumino 項

本稿では、Wess-Zumino 項を次のように定義する[5]。多様体 M 上の閉 $d+1$ 形式 ω で、$d+1$ 次元のどんな閉じた部分空間で積分しても値が $2\pi i$ の整数倍をとるものを考える。h を d 次元空間 X から M への写像 $(h: X \to M)$ とし、X を境界とするような $d+1$ 次元空間 Y から M への写像 $H(H: Y \to M)$ を h を拡張して定義する。Wess-Zumino 項はこれらの定義を使って、

$$\Gamma_{WZ}(h) = \exp \int_{H(Y)} \omega \tag{31}$$

と定義する。この値は、h にのみ依存し h の拡張 H の仕方によらないことが次のよう分かる。H と H' を 2 つの拡張とする。これらは境界 $h(X)$ が一致しているから、そこで張り合わせた多様体 $H(Y) \cup H'(Y)$ で ω を積分すると、その値は $2\pi n$(n は整数) になるので、

$$\exp \int_{H'(Y)} \omega = \exp \int_{H(Y)} \omega \tag{32}$$

となって、$\Gamma_{WZ}(h)$ は h のみに依り拡張の仕方に依らない。

d 次元空間 X を $S^1 \times Z$ とする。X を境界とするような Y は $D \times Z$ である。Z から M への写像の集合を $C^\infty(Z, M)$ とすると、その中の閉曲線を写像 $\hat{h}: S^1 \to C^\infty(Z, M)$ で定義する。

$$\hat{h}(\theta)(x) = h(\theta, x) \tag{33}$$

$C^\infty(Z, M)$ の 1 点である写像 f を決めるとその点の接ベクトルは、M 上の像 $f(Z)$ の接ベクトル場が対応する。$d+1$ 形式 ω を $C^\infty(Z, M)$ の中の D の像の 2 つの接ベクトル場で縮約し、残りの $d-1$ 次元を $f(Z)$ で積分したものは、$C^\infty(Z, M)$ 上の 2 形式 F_ω を定める。この F_ω は閉形式で $C^\infty(Z, M)$ の中の S^2 で積分すると $2\pi i$ の整数倍になる。すると、直線束の理論から、この F_ω を曲率とする $C^\infty(Z, M)$ 上の直線束 L が存在する。

この直線束 L において、$C^\infty(Z, M)$ のなかの閉曲線 $\hat{h}$ に対するホロノミー $\mathrm{hol}(\hat{h})$ を次のように定義する。h の拡張 H は $D \times Z$ から M への写像であるが、これを使って、$\hat{h}$ の拡張 $\hat{H}: D \to C^\infty(Z, M)$ を $\hat{H}(r, \theta)(z) = H(r, \theta, z)$ で定義する。$\hat{h}$ のホロノミーは F_ω の $C^\infty(Z, M)$ のなかの D 上の積分

$$\mathrm{hol}(\hat{h}) = \exp \int_{\hat{H}(D)} F_\omega \tag{34}$$

で与えられる。一方、Wess-Zumino 項は、$\Gamma_{WZ}(h) = \exp \int_{H(D\times Z)} \omega$ であったが、この 2 つは等しいことが次のように分かる。

$$\begin{aligned} &\int_{H(D\times Z)} \omega \\ &= \int_D dr d\theta \int_{\hat{H}(r,\theta)(Z)} \omega \left(\frac{\partial \hat{H}}{\partial r}, \frac{\partial \hat{H}}{\partial \theta}, \cdots \right) \\ &= \int_D F_\omega \left(\frac{\partial \hat{H}}{\partial r}, \frac{\partial \hat{H}}{\partial \theta} \right) dr d\theta \\ &= \int_{H(D\times Z)} \omega \end{aligned} \tag{35}$$

であるから、$\mathrm{hol}(\hat{h}) = \Gamma_{WZ}(h)$ である。

6 ゲージ・アノマリーへの応用

指数定理 (14) の被積分関数は、Chern 形式と呼ばれる。

$$\mathrm{ch}_l(F) = \frac{1}{l!} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^l \mathrm{tr}(\overbrace{F \wedge \cdots \wedge F}^{l}) \tag{36}$$

Chern 形式と Chern-Simons 形式との関係は、

$$\mathrm{ch}_l(F) = dQ_{2l-1}(A, F) \tag{37}$$

であり、Q_{2l-1} は、

$$\begin{aligned} &Q_{2l-1}(A, F) \\ &= \frac{1}{(l-1)!} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^l \int_0^1 dt \mathrm{tr}\{A(tdA + t^2A^2)^{(l-1)} \end{aligned} \tag{38}$$

と表せる。Chern 形式は $2l$ 次元の閉じた空間で積分すると値が整数になる。従ってこれを境界がある $2l$ 次元空間で積分したものは、前節の Wess-Zumino 項 (31) と同じ性質がある。

前節の議論から、この Chern 形式が曲率となり、ホロノミーが Chern-Simons 形式であるような直線束を考えることができる。これが 4 節のディラック演算子に対する行列式直線束になることを示す。3 節の式 (8) で定義したゲージ場を考える。パラメータ θ を固定し、t を 0 から 1 まで動かすと空間 $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ の中にあ

る道ができる。$\theta = 0$ のときのこの道と $\theta \neq 0$ の道は $t = 0$ のときどちらも $A = 0$ で、$t = 1$ では、A^θ と A なので、$\mathcal{A}/\mathcal{G}$ の中では同一点になりこの 2 つの道は 1 つの閉曲線になっている。この閉曲線に沿ってのホロノミーを、この閉曲線を境界とする円盤上の Chern 形式の積分とすると、これは境界を $\theta = 0$ と θ の 2 つの道に分けたときのそれぞれの Chern-Simons 形式の積分になる。空間を 4 次元球面とするとこの積分は 5 次元円盤 D^5 上の積分、

$$\begin{aligned} &\int_{D\times S^4} \mathrm{ch}_3(F) \\ &= \frac{1}{24\pi}\int_{D^5}\{Q_5(A^\theta, F^\theta) - Q_5(A, F)\} \\ &= \frac{1}{240\pi^2}\int_{D^5}\mathrm{tr}(g^{-1}dg)^5 \\ &+\frac{1}{48\pi}\int_{S^4}\mathrm{tr}\Big[-V(AF+FA-A^3) \\ &\qquad +\frac{1}{2}(VA)^2 + V^3A\Big] \end{aligned} \tag{39}$$

となる。ここで $V = dgg^{-1}$ である。$\mathcal{A}/\mathcal{G}$ を底空間とする直線束の断面は閉曲線に沿って平行移動して元に戻ったときこの積分 (39) だけファイバー方向にずれているはずである。これは有限のゲージ変換にたいするアノマリーといえる。無限小のゲージ変換 $g = 1 + v$ に対しては、このずれは、

$$\frac{1}{24\pi}\int_{S^4}\mathrm{tr}\left[vd\left(AdA + \frac{1}{2}A^3\right)\right] \tag{40}$$

となり、無限小のゲージ変換にたいするアノマリー (5)(19) となっていることが分かる。

7 まとめ

ゲージ・アノマリーの幾何学的な側面について考察した。特に、Chern 形式がゲージ場の軌道空間 $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ の曲率にあたり、Chern-Simons 形式が接続と考えられることを示した。この直線束は底空間 $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ が無限次元であり、ループ空間 (または、高次元のループ空間) とも見なせる。ループ空間上のファイバー束は、有限次元空間上のファイバー束の拡張であり、近年 gerbe と呼ばれ研究が進められている(6)。このような見方は、アノマリーの物理的解釈にも新しい可能性を与えると考えられる。

参考文献

(1) T.T. Wu and C.N. Yang, Phys.Rev.D12:3845-3857,(1975)
(2) M. Atiyah and I. Singer, Proc.Nat.Acad.Sci. USA 81,2597(1984)
(3) R.A. Bertlmann, Anomalies in Quantum Field Theory (Clarendon, Oxford, 1996)
(4) L. Alvarez-Gaume and P. Ginsparg, Nucl. Phys.B243:449(1984)
(5) A.L. Carey and M.K. Murray, Lett.Math. Phys.12:323(1986)
(6) N. Hitchin, math.dg/9907034

(2003. 11. 21 受理)