e の算術的導入

藤堂　最音 *

"e" as an Arithmetic Number

TOHDOH Saion

π and "e", base of natural logarithm, are two fundamental number for science and mathematics. π is known as ratio of diameter and length of circle which is seen very easily.On the other hand, "e" is not so visible.We need many steps to understand it.It is seen that all of the students use "e" as a number in formulae of calculus never-the-less few of them can show the meaning of the number. We tried to introduce "e" in elementary ways.Calculus after "e", not "e" after calculus.This is a case.

1　e の定義

自然対数の底 e の導入は, 対数関数 $y = \log_e x$ の導関数が, $y' = \dfrac{1}{x}$ となるように,

$$e = \lim_{h \to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$$

と定義することによってなされるのが, 通常であろう. しかし, これは初めて目にする者にとっては, いかにも人工的に見え, きわめて把握しずらい数である.
教室という現場にあっては, 指数関数 $y = a^x$ について,

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

となることより,

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1$$

となる数 a を, 指数関数の底 e として定義するほうが, つかませやすい.
指数関数のグラフを丁寧に描かせれば, e のおよその値が, 2 と 3 のあいだくらいであることも, 容易に読みとれる. また, その近似値も, たとえば $h = 0.01$ と固定したとき,

$$(2.5^{0.01} - 1)/0.01 \doteqdot 0.9205$$

$$(2.6^{0.01} - 1)/0.01 \doteqdot 0.9601$$

$$(2.7^{0.01} - 1)/0.01 \doteqdot 0.9982$$

$$(2.8^{0.01} - 1)/0.01 \doteqdot 1.0103$$

とでも電卓をたたかせれば, 2.7 と 2.8 の中間, 2.7 の方に近い数であることくらいはわかる.
さらに, 指数関数の微分係数は, 底が何であれ, $x = 0$ での微分係数で支配されることもわかって, 指数関数の導関数の理解に貢献することが多い. 対数関数から微分を始めるのは, 初心者にとっては不自然である.
しかし, いずれにしても, 定義上どうしても微分の概念につながった形でしか定義されないのが, いまいち,

*一般科目　数学

釈然としないところである.

そこで, ある大学の編入学試験をヒントに, 微積分となるべく (表立っては) 関係ない形で, 指数関数・対数関数を学んだ学生なら, 誰でも, 理解できるように, 算術的に e が導入されないか, 考えてみた.

2 $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフの重要な性質

もとになるのは, 関数 $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフである.
そのグラフの, 区間 $0<a\leqq x\leqq b$ の面積を, $S(a,b)$ と記す.
このとき, 加法性,

$$S(a,b)+S(b,c)=S(a,c) \quad \cdots \quad (\text{加法性})$$

は自然だが, 面積の向きも,

$$S(b,a)=-S(a,b)$$

ときめておくことにする.
$S(a,b)$ に関して, $k>0$ をとれば, 面積の不変性,

$$S(ka,kb)=S(a,b) \quad \cdots \quad (\text{不変性})$$

が成り立つ.
なぜなら, $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフでは, $x\to kx$ のとき,

縦 (yの値・関数値) が, $\dfrac{1}{k}$ 倍になり
横 (x の増分) が k 倍になる

ので, 総体的に面積が変わらないからである.
厳密にいえば, 無限に細い長方形の面積を調べる必要があるが, 直観的に認めさせることにする.

3 関数 $S(1,x)$

ここで, x の関数 $f(x)$ を

$$f(x)=S(1,x)$$

と定義する.
このとき, 次の公式が成り立つ.

$$\begin{aligned} f(xy) &= S(1,xy) \\ &= S(1,x)+S(x,xy) && (\text{加法性})\text{ より} \\ &= S(1,x)+S(1,y) && (\text{不変性})\text{ より} \\ &= f(x)+f(y) \quad \cdots \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x}{y}\right) &= S\left(1,\frac{x}{y}\right) \\ &= S(y,x) && (\text{不変性})\text{ より} \\ &= S(y,1)+S(1,x) && (\text{加法性})\text{ より} \\ &= -S(1,y)+S(1,x) \\ &= f(x)-f(y) \quad \cdots \quad (2) \end{aligned}$$

$$f(x^n) = f(x \cdots x) = f(x) + \cdots + f(x) = nf(x)$$

$$f(x) = f(x^{\frac{1}{n} \cdot n}) = nf(x^{\frac{1}{n}}) \text{ より}, f(x^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n}f(x)$$

したがって,

$$f(x^{\frac{n}{m}}) = \frac{n}{m}f(x)$$

なので, 任意の実数 α でも,

$$f(x^\alpha) = \alpha f(x) \quad \cdots \quad (3)$$

4 e の定義

次に, 正値関数 $y = \dfrac{1}{x}$ の面積関数 $f(x) = S(1, x)$ は単調増加だから,

$$f(x) = 1 \quad \text{つまり} \quad S(1, x) = 1$$

であるような x が, ただ 1 つきまるので, それを E と記す.
値を調べれば, E が 2 と 3 の間にあることも容易にわかる.

$$f(E) = S(1, E) = 1 \quad \cdots \quad (4)$$

指数関数・対数関数を学んだ後なので, (1)〜(4) により, $f(x)$ が E を底とする対数関数らしいということは, 容易に予想できる.
厳密には, $y = f(x)$ のとき, $f(E) = 1$ と, $\alpha f(x) = f(x^\alpha)$ に注意すると,

$$f(x) = y = y \cdot f(E) = f(E^y)$$

したがって, やはり $f(x)$ の単調性により,

$$x = E^y$$

の関係が成り立つことがわかる. したがって, 通常の指数対数の関係により,

$$y = \log_E x$$

$$f(x) = \log_E x$$

であることがわかる.

5 微分の公式

これらによって, 指数関数・対数関数の微分の公式の直観的な解釈を, 次のように, 与えることができる.

5.1 $f(x) = \log_E x$ の微分

$$f(x + \Delta x) - f(x) = S(x, x + \Delta x) \fallingdotseq \frac{1}{x}\Delta x$$

より, $\Delta x \to 0$ とすれば,

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \to f'(x) = \frac{1}{x}$$

5.2 $g(x) = E^x$ の微分

$$\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \frac{E^{x+\Delta x} - E^x}{\Delta x} = E^x \cdot \frac{E^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

また,

$$S(1, E^{\Delta x}) = f(E^{\Delta x}) = \Delta x \cdot f(E) = \Delta x$$

である.
一方, $S(1, E^{\Delta x})$ は, 高さ 1, 幅 $E^{\Delta x} - 1$ の微小長方形と考えられるので,

$$S(1, E^{\Delta x}) \fallingdotseq 1 \cdot (E^{\Delta x} - 1) = E^{\Delta x} - 1$$

つまり,

$$E^{\Delta x} - 1 \fallingdotseq \Delta x$$

したがって, $\Delta x \to 0$ とすれば,

$$\frac{E^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \to 1$$

$$\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \to g'(x) = E^x$$

(2003. 11. 21 受理)